OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2007

CORRIGE

EXERCICE 3 : « *des trapèzes de même aire* »

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1) Question préliminaire :

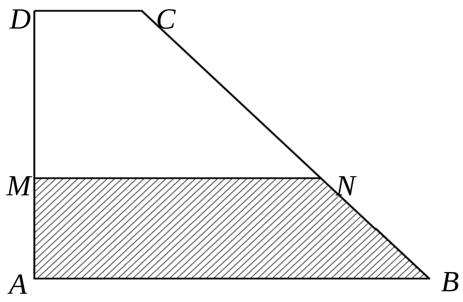
$m^2 - p^2 = 8$ si et seulement si $(m-p)(m+p) = 8$. m et p étant des entiers naturels, $m - p < m + p$ (m,p) est donc solutions de l'un des deux systèmes $\begin{cases} m-p=1 \\ m+p=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m-p=2 \\ m+p=4 \end{cases}$ ce qui donne une solution unique (3,1).

2) *On considère les trapèzes rectangles $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :*

- $\widehat{ABC} = 45°$.
- *les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $AD > 2$.*

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.

Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.



Posons $MN = x$ et $DM = y$ donc $x > y$. L'aire du trapèze *ABNM* est $2x + 2$, l'aire du trapèze *MNCD* est $\dfrac{(x + x - y) \times y}{2} = \dfrac{y(2x - y)}{2}$. On cherche donc x et y afin que $4x + 4 = 2xy - y^2$ soit $y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$ qui s'écrit encore : $(x-y)^2 + (x-2)^2 = 8$. Il vient x=5 et y=4 donc AB=7, AD=6, CD=1.