OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2007

CORRIGE

EXERCICE 4 : « *périodes* »

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 1] par : $\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x \text{ si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

1) *Représenter graphiquement la fonction f et montrer que si* $0 \le x \le 1$, *alors* $0 \le f(x) \le 1$.

1°) La représentation graphique est celle d'une fonction affine par intervalle. Lorsque $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $0 \le 2x \le 1$ et lorsque $\frac{1}{2} < x \le 1$, $0 \le 2 - 2x \le 1$ donc lorsque x varie dans l'intervalle [0,1], il en est de même pour $f(x)$ ce qui assure la possibilité de fabrication de la suite de nombres.

2°) Etude des cas particuliers

a) Si $x_0 = \frac{1}{48}$, on obtient : $x_1 = \frac{1}{24}, x_2 = 2x_1 = \frac{1}{12}, x_3 = \frac{1}{6}, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{2}{3}, x_6 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, x_7 = \frac{2}{3}, \ldots$ d'où le résultat.

b) Si $x_0 = \frac{2}{11}$, on obtient : $x_1 = \frac{4}{11}, x_2 = 2x_1 = \frac{8}{11}, x_3 = 2 - \frac{16}{11} = \frac{6}{11}, x_4 = 2 - \frac{12}{11} = \frac{10}{11}, x_5 = 2 - \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$

On constate donc que $x_5 = x_0 = x_{10} = \ldots.x_{5k}$. Or 2007=2005+2 et d'après ce qui précède, $x_{2005} = x_0$. On en déduit finalement $x_{2007} = x_2 = \frac{8}{11}$.

c) Cherchons $x_0 < \frac{1}{2}$ tel que $x_7 = x_0$. On peut par exemple adopter le schéma suivant :

$x_1 = 2x_0, x_2 = 4x_0, x_3 = 8x_0, x_4 = 16x_0, x_5 = 32x_0, x_6 = 64x_0$ et $x_7 = 2 - 128x_0 = x_0$ donc $x_0 = \frac{2}{129}$ convient.

Procédons de même si l'on veut que $x_p = x_0$, on trouvera $x_0 = \frac{2}{1 + 2^p}$.

Remarque : d'autres nombres répondent à la question comme $x_0 = \frac{2}{2^p - 1}$

3°) Posons $x_0 = \frac{p}{q}$ où $p < q$. Il existe, dans l'intervalle [0,1], q fractions du type $\frac{k}{q}$ avec k=1,2,…q. D'autre part, si x est un rationnel, $f(x)$ aussi et a le même dénominateur que x. $f(x)$ ne peut donc prendre qu'au plus q valeurs et la suite est donc nécessairement périodique.