

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2007

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 4 : « périodes »

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement la fonction f et montrer que si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq f(x) \leq 1$.

Un nombre $x_0 \in [0,1]$ étant choisi, on fabrique une suite de nombres en posant :

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

2) Où l'on étudie quelques cas particuliers.

a) On pose $x_0 = \frac{1}{48}$. Montrer que la suite obtenue est constante à partir de x_5 .

b) On pose $x_0 = \frac{2}{11}$. Ecrire les 5 premiers termes de la suite obtenue et en déduire la valeur de x_{2007} .

c) Peut-on trouver une valeur de x_0 telle que la suite de nombres se répète tous les 7 termes ? tous les p termes (p étant un entier non nul quelconque) ?

3) Montrer que si x_0 est un nombre rationnel, la suite de nombres est périodique (c'est-à-dire qu'elle se répète à partir d'un certain rang).