OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2007

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 : « *un problème de tas* »

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut. Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2).

On considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques, de même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1) On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7). Quelle répartition obtiendra-t-on après :
   a) 3 manipulations ?
   b) 7 manipulations ?
   c) 11 manipulations ?
   d) 2007 manipulations ?

2) Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1). Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3) Paul et Virginie jouent ensemble. Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie, puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale. Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
   Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

EXERCICE 2 : « *les pesées frauduleuses* »

Vers l'an 250 de notre ère, vivait à Alexandrie le mathématicien Diophante. Celui-ci avait remarqué que certains marchands d'orge truquaient leur balance à plateaux en raccourcissant l'un des fléaux : ils trompaient les clients sur la quantité en plaçant les masses du côté du fléau le plus court. (En effet, à l'équilibre, le produit de la masse par la longueur du fléau, exprimés dans la même unité, est le même de chaque côté.)
Pour punir les marchands malhonnêtes, Diophante leur proposait de mettre alternativement les masses dans un plateau, puis dans l'autre : un client serait lésé, le suivant avantagé … et les fraudeurs étaient heureux de s'en tirer à si bon compte.

1) Un marchand ayant raccourci un fléau de 10 % avait réalisé dans la journée 180 pesées d'un kilogramme, en suivant la règle de Diophante. Quelle quantité d'orge avait-il perdue ?
2) Même question pour un marchand ayant raccourci un fléau de 20 %, après avoir réalisé 160 pesées d'un kilogramme.
3) Montrer qu'avec la règle de pesée de Diophante, tout fléau raccourci cause un préjudice à son auteur, après un nombre pair de pesées.

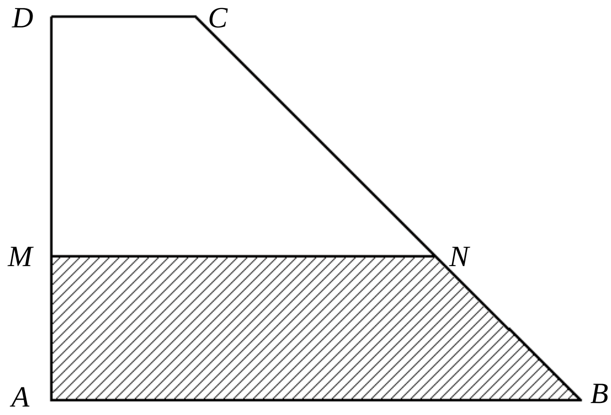
EXERCICE 3 : « *des trapèzes de même aire* »

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1) Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$? En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).



2) On considère les trapèzes rectangles $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45°$
- les distances *AB*, *AD* et *CD* sont des nombres entiers, et $AD > 2$.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.

Déterminer les distances *AB*, *AD* et *CD* de sorte que les aires des trapèzes *MNBA* et *MNCD* soient égales.

<u>Indication</u> : *On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.*

EXERCICE 4 : « *périodes* »

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0, 1] par : $\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x \text{ si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

1) Représenter graphiquement la fonction *f* et montrer que si $0 \le x \le 1$, alors $0 \le f(x) \le 1$.

Un nombre $x_0 \in [0,1]$ étant choisi, on fabrique une suite de nombres en posant : $\begin{array}{l} x_1 = f(x_0) \\ x_2 = f(x_1) \\ x_3 = f(x_2) \\ etc. \end{array}$,

2) Où l'on étudie quelques cas particuliers.

a) On pose $x_0 = \frac{1}{48}$. Montrer que la suite obtenue est constante à partir de x_5.

b) On pose $x_0 = \frac{2}{11}$ Ecrire les 5 premiers termes de la suite obtenue et en déduire la valeur de x_{2007}.

c) Peut-on trouver une valeur de x_0 telle que la suite de nombres se répète tous les 7 termes ? tous les *p* termes (*p* étant un entier non nul quelconque) ?

3) Montrer que si x_0 est un nombre rationnel, la suite de nombres est périodique (c'est-à-dire qu'elle se répète à partir d'un certain rang).