OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

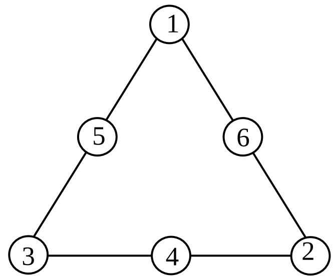
SESSION 2008

CORRIGE

EXERCICE 1 : « *La bonne somme* »

On veut placer les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les cercles représentés ci-contre, de telle sorte que la somme S des trois nombres placés sur chaque côté du triangle équilatéral soit la même sur les trois côtés.

1) *Donner une configuration solution du problème.* Voir ci contre



2) *Quelles sont toutes les valeurs possibles de la somme S ?*

Appelons a, b, c, les nombres « posés » sur les sommets, la somme S vérifie : $3S = 21 + a + b + c$ soit $S = 7 + \frac{1}{3}(a+b+c)$. La valeur minimale de $a+b+c$ est 1+2+3=6, la valeur maximale est 4+5+6=15.

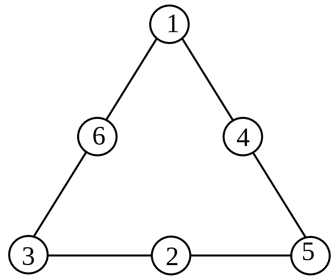
***S* ne peut donc prendre que les valeurs 9, 10, 11, 12.**

3) *Donner les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de la somme S.*

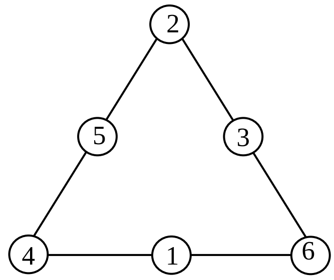
IL faut étudier les 4 cas successivement :

- S=9. donc $a+b+c=6$. Cette somme ne peut être obtenue qu'avec le triplet 1,2,3. On obtient la configuration ci-dessus.

- S=10. donc $a+b+c=9$. Cette somme est obtenue avec les trois triplets (1,2,6) ; (1,3,5), (2,3,4).le premier et le troisième triplet ne fournissent pas de solution , le deuxième conduit à la solution ci contre :



- S=11 : donc $a+b+c=12$. Cette somme est obtenue avec les trois triplets (1,5,6) ; (2,4,6), (5,3,4).le premier et le troisième triplet ne fournissent pas de solution , le deuxième conduit à la solution ci contre :



- S=12 : donc $a+b+c=15$. Cette somme est obtenue avec le seul triplet (4,5,6) qui fournit une quatrième et dernière solution « duale » de la première

EXERCICE 2 : « *Les bons nombres* »

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

1) *Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».*

On peut simplifier l'étude en éliminant toutes les décompositions qui contiennent au moins deux « 1 » et au moins deux « 2 ». On trouve ainsi que parmi les nombres de 4 à 10, les seuls qui soient « bons » sont 4, 9, 10.

2) *Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».*

Soit n un entier naturel plus grand que 2. Alors $n^2 = \underbrace{n+n+...+n}_{n\ fois}$ et $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{n\ fois}=1$ donc n^2 est bon.

3) *Montrer que si n est « bon », alors 2 n + 2 et 2 n + 9 sont « bons ».*

Supposons que n soit bon, il existe une suite d'entiers $a_1, a_2, ..., a_p$ tels que $n = a_1 + a_2 + ... + a_p$ et $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_p}=1$. $2n+2 = 2a_1+2a_2+...+2a_p+2$ et on a $\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_p}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $2n+2$ est bon.

De même $2n+9 = 2a_1+2a_2+...+2a_p+(3+6)$ et on a $\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_p}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $2n+9$ est bon.

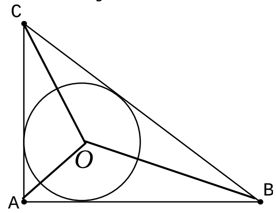
4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».

Appelons f et g les fonctions affines définies par $f(x)=2x+2$ et $g(x)=2x+9$. D'après ce qui précède, si n est bon, $f(n)$ et $g(n)$ le sont aussi. Les nombres entiers compris entre 24 et 55 ont pour images par f les entiers pairs compris entre 50 et 112 et par g les nombres entiers impairs compris entre 57 et 119. On peut donc affirmer que si les nombres entiers compris entre 24 et 55 sont bons, il en est de même des entiers compris entre 56 et 113. Par récurrence, tous les entiers supérieurs à 24 sont bons.

EXERCICE 3 : « *La Sangaku* »

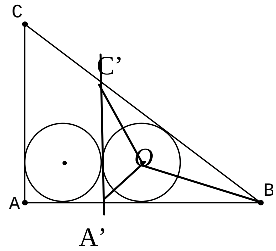
Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.

Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives $AB=4$ et $AC=3$.



1) Calculer le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle.

Chacun des triangles OAB, OAC, OBC a une hauteur égale à r, la somme de leurs aires est égale à l'aire du triangle ABC donc $3r+4r+5r=12$ et $r=1$.



2) Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.

Posons $2\alpha = A'B = 4-2r$. Comme les triangles ABC et $A'BC'$ sont semblables, on a $A'C' = \frac{3}{4}\times 2\alpha = \frac{3}{2}\alpha$ et $BC' = \frac{5}{2}\alpha$ où $(A'C')$ est la tangente commune aux deux cercles.

Puisque O est le centre du cercle inscrit au triangle $A'BC'$, on peut reprendre le raisonnement de 1°). On obtient : $\frac{3}{4}\alpha r + \frac{5}{4}\alpha r + \alpha r = \frac{3}{2}\alpha^2$ soit $r=\frac{1}{2}\alpha$ puisque dans cette question $\alpha = 2-r$, $r=\frac{2}{3}$.

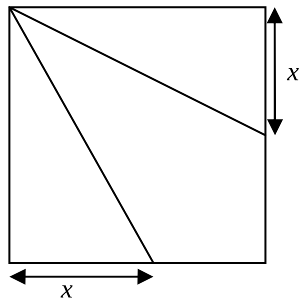
3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n de chaque cercle.

Le résultat précédent s'applique avec $2\alpha = 4-2(n-1)r$ soit $\alpha = 2-(n-1)r$. On obtient $r=\frac{2}{n+1}$.

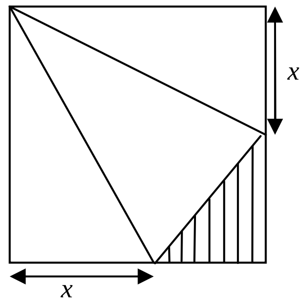
b) Ce rayon est égal à $\frac{1}{2008}$ si $n=4015$.

EXERCICE 4 : « *Un partage équitable* »



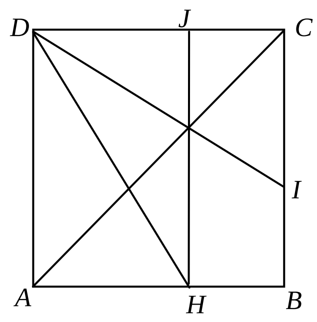
1) Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.
Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?

$x=\frac{2}{3}$ de manière immédiate



2) Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires. Peuvent-elles avoir la même aire ?.

Pour cela il faut et il suffit que aire(ABI) = aire(AIH) – aire(IHC) soit $\frac{x}{2} = (1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}$. x est alors la solution positive de l'équation $x^2+x-1=0$ que l'on notera α. Les élèves de première S peuvent conclure : $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



3) *Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci contre) la construction de la question 2, il mène du point H, la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB). Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.*
Qu'en est-il ?

Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, le point I a pour coordonnées $(1,1-\alpha)$ et la droite (DI) a pour équation $y=-\alpha x+1$. Cette droite coupe la droite (AC) d'équation $y=x$ au point d'abscisse $x>0$ solution de l'équation $x=-\alpha x+1$. Il vient $x=\dfrac{1}{1+\alpha}$. Comme α est solution de $\alpha^2+\alpha-1=0$, on en déduit que $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$. Léonard a bien vu.