OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2008

CORRIGE

EXERCICE 2 : « *Les bons nombres* »

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

1) *Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».*
On peut simplifier l'étude en éliminant toutes les décompositions qui contiennent au moins deux « 1 » et au moins deux « 2 ». On trouve ainsi que parmi les nombres de 4 à 10, les seuls qui soient « bons » sont 4, 9, 10.

2) Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».

Soit n un entier naturel plus grand que 2. Alors $n^2 = \underbrace{n+n+...+n}_{n\ fois}$ et $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{n\ fois}=1$ donc n^2 est bon.

3) Montrer que si n est « bon », alors 2 n + 2 et 2 n + 9 sont « bons ».
Supposons que n soit bon, il existe une suite d'entiers $a_1, a_2, ..., a_p$ tels que $n = a_1 + a_2 + ... + a_p$ et $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_p}=1$. $2n+2 = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_p + 2$ et on a $\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_p}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $2n+2$ est bon.

De même $2n+9 = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_p + (3+6)$ et on a $\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_p}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $2n+9$ est bon.

4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
Appelons f et g les fonctions affines définies par $f(x) = 2x + 2$ et $g(x) = 2x + 9$. D'après ce qui précède, si n est bon, $f(n)$ et $g(n)$ le sont aussi. Les nombres entiers compris entre 24 et 55 ont pour images par f les entiers pairs compris entre 50 et 112 et par g les nombres entiers impairs compris entre 57 et 119. On peut donc affirmer que si les nombres entiers compris entre 24 et 55 sont bons, il en est de même des entiers compris entre 56 et 113. Par récurrence, tous les entiers supérieurs à 24 sont bons.