OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

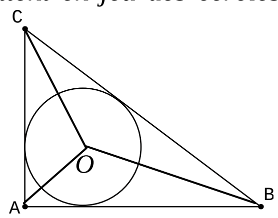
SESSION 2008

CORRIGE

EXERCICE 3 : « *La Sangaku* »

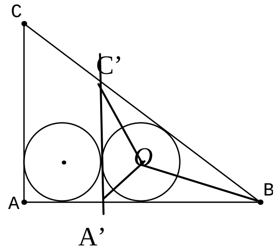
Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.

Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives $AB = 4$ *et* $AC = 3$.



1) Calculer le rayon r_1 *du cercle inscrit dans ce triangle.*

Chacun des triangles *OAB*, *OAC*, *OBC* a une hauteur égale à *r*, la somme de leurs aires est égale à l'aire du triangle *ABC* donc $3r + 4r + 5r = 12$ et $r = 1$.



2) Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.

Posons $2\alpha = A'B = 4 - 2r$. Comme les triangles *ABC* et *A'BC'* sont semblables, on a $A'C' = \frac{3}{4} \times 2\alpha = \frac{3}{2}\alpha$ et $BC' = \frac{5}{2}\alpha$ où $(A'C')$ est la tangente commune aux deux cercles.

Puisque *O* est le centre du cercle inscrit au triangle $A'BC'$, on peut reprendre le raisonnement de 1°). On obtient : $\frac{3}{4}\alpha r + \frac{5}{4}\alpha r + \alpha r = \frac{3}{2}\alpha^2$ soit $r = \frac{1}{2}\alpha$ puisque dans cette question $\alpha = 2 - r$, $r = \frac{2}{3}$.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n *de chaque cercle.*

Le résultat précédent s'applique avec $2\alpha = 4 - 2(n-1)r$ soit $\alpha = 2 - (n-1)r$. On obtient $r = \frac{2}{n+1}$.

b) Ce rayon est égal à $\frac{1}{2008}$ si $n = 4015$.