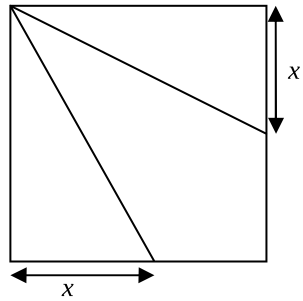
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

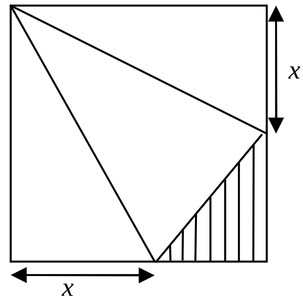
SESSION 2008

CORRIGE

EXERCICE 4 : « *Un partage équitable* »

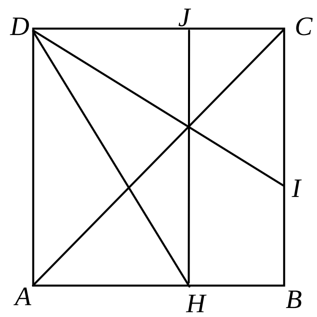


1) *Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.*
Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?
$x = \frac{2}{3}$ de manière immédiate



2) *Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires. Peuvent-elles avoir la même aire ?.*

Pour cela il faut et il suffit que aire(ABI) = aire(AIH) – aire(IHC) soit $\frac{x}{2} = (1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}$. x est alors la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ que l'on notera α. Les élèves de première S peuvent conclure : $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



3) *Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci contre) la construction de la question 2, il mène du point H, la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB). Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.*
Qu'en est-il ?

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, le point I a pour coordonnées $(1, 1-\alpha)$ et la droite (DI) a pour équation $y = -\alpha x + 1$. Cette droite coupe la droite (AC) d'équation $y = x$ au point d'abscisse x>0 solution de l'équation $x = -\alpha x + 1$. Il vient $x = \frac{1}{1+\alpha}$. Comme α est solution de $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$, on en déduit que $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$. Léonard a bien vu.