

# OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2008

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

*Les quatre exercices sont indépendants.*

*Les calculatrices sont autorisées.*

## EXERCICE 2 : « Les bons nombres »

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$ , donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$  ;  $3 = 1 + 1 + 1$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$  ; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

- 1) Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
- 2) Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
- 3) Montrer que si  $n$  est « bon », alors  $2n + 2$  et  $2n + 9$  sont « bons ».
- 4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».  
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?