

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2008

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 3 : « La Sangaku »

Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.

Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives $AB = 4$ et $AC = 3$.

- 1) Calculer le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle.

(On pourra exprimer de deux manières l'aire de ce triangle.)

- 2) Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.

Calculer le rayon r_2 de chacun de ces cercles.

- 3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère n cercles tous tangents au côté $[AB]$, tels que de plus :

- le premier est tangent au côté $[AC]$ et au deuxième cercle ;
- le dernier est tangent au précédent et au côté $[BC]$;
- chacun des autres est tangent à ses deux voisins.

La figure ci-contre représente le cas $n = 5$.

- a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n de chaque cercle.

- b) Pour quelle valeur de n ce rayon est-il égal à $\frac{1}{2008}$?

