OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2008

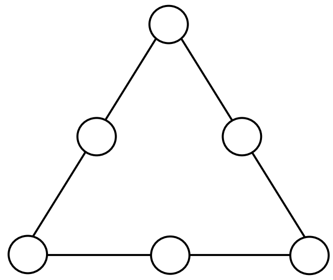
CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 : « *La bonne somme* »

On veut placer les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les cercles représentés ci-contre, de telle sorte que la somme S des trois nombres placés sur chaque côté du triangle équilatéral soit la même sur les trois côtés.



1) Donner une configuration solution du problème.
2) Quelles sont toutes les valeurs possibles de la somme S ?
3) Donner les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de la somme S.

(*Deux solutions « images » l'une de l'autre par une rotation ou par une symétrie axiale laissant invariant le triangle seront considérées comme identiques*).

EXERCICE 2 : « *Les bons nombres* »

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».
Ainsi, par exemple :

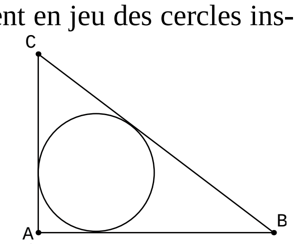
$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

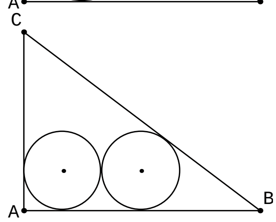
1) Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2) Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3) Montrer que si n est « bon », alors $2n+2$ et $2n+9$ sont « bons ».
4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

EXERCICE 3 : « *La Sangaku* »

Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.
Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives $AB=4$ et $AC=3$.



1) Calculer le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle.
   (On pourra exprimer de deux manières l'aire de ce triangle.)

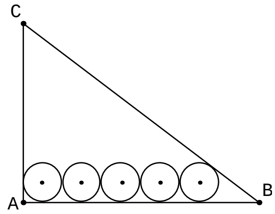


2) Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.

Calculer le rayon r_2 de chacun de ces cercles.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère n cercles tous tangents au côté $[AB]$, tels que de plus :
- le premier est tangent au côté $[AC]$ et au deuxième cercle ;
- le dernier est tangent au précédent et au côté $[BC]$;
- chacun des autres est tangent à ses deux voisins.

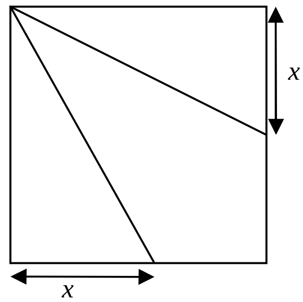
La figure ci-contre représente le cas $n = 5$.



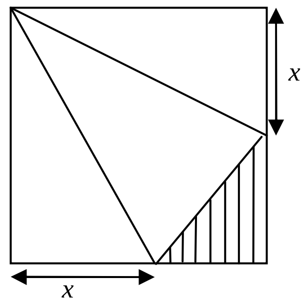
a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n de chaque cercle.

b) Pour quelle valeur de n ce rayon est-il égal à $\frac{1}{2008}$?

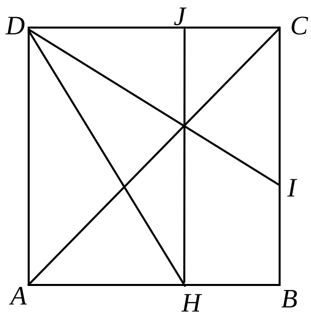
EXERCICE 4 : « *Un partage équitable* »



1) Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.
Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2) Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.
Peuvent-elles avoir la même aire ?.



3) Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci contre) la construction de la question 2, il mène du point H, la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.
Qu'en est-il ?