OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
SESSION 2009 - CORRIGÉ

EXERCICE 1

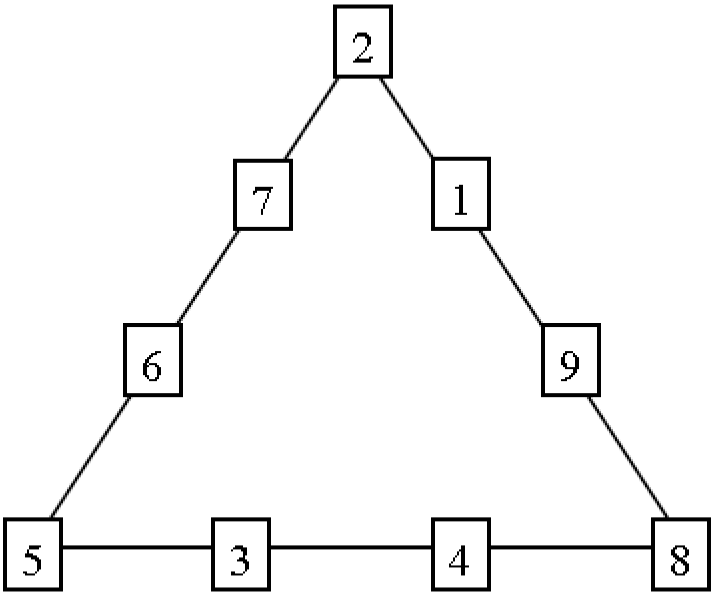
♦ **Partie A : Questions préliminaires :**

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1) La plus petite valeur possible pour leur somme est $1+2+3=6$
2) La plus grande valeur possible pour leur somme est $7+8+9=24$.

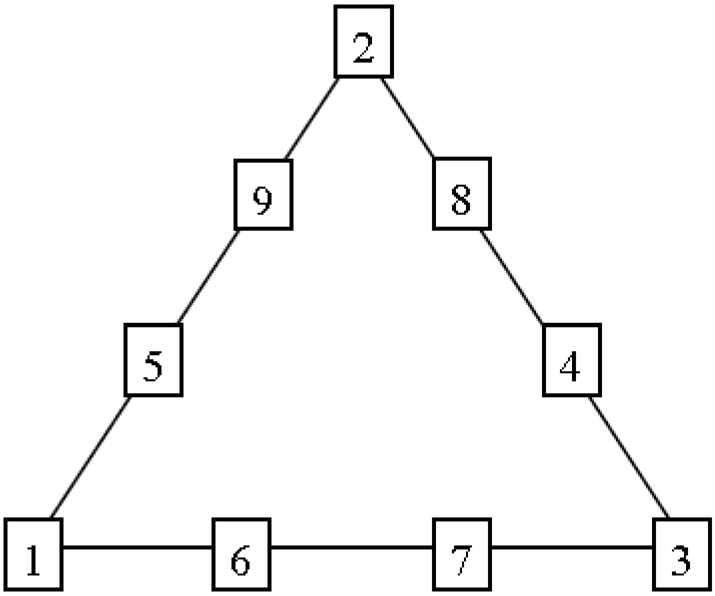
♦ **Partie B : Les triangles magiques :**

1) Dans cette question, on pose $n_1 = 2$, $n_4 = 5$ et $n_7 = 8$.
   On obtient le triangle 20-magique ci dessous (pas de justification demandée)



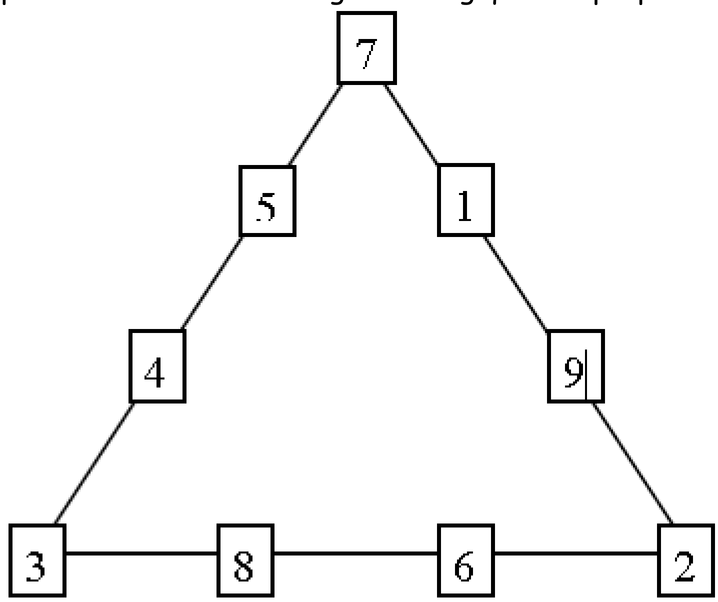
Triangle 20-magique

2) On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a. $45 + T = 3S$ puisque $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 3S - T$.
   b. D'après le préliminaire, $6 \leq T \leq 24$ donc $6 \leq 3S - 45 \leq 24$ et $17 \leq S \leq 23$.
   c. Selon les valeurs successives de S, on a :
      (17,6), (18,9), (19,12), (20,15), (21,18), (22,21), (23, 24).
3) Si $S = 17$, $T = 6$, les nombres placés aux sommets sont donc 1, 2, 3, un tel triangle est proposé ci-dessous :



Triangle 17-magique

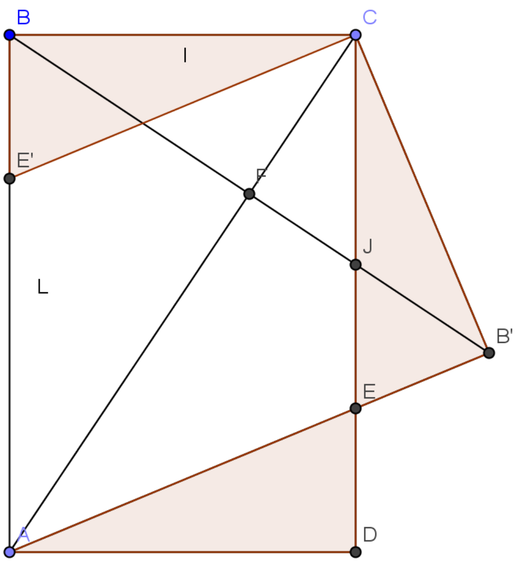
4) Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
   Si un tel triangle existe, T = 9 donc le chiffre 9 n'est pas sur un sommet, il est donc sur un côté par exemple $n_2 = 9$.
   Il vient $n_1 + n_3 + n_4 = 9$ et $n_1 + n_4 + n_7 = 9$ d'où
   $n_3 = n_7$ ce qui est exclu.
5) Supposons que $n_2 = 7$, alors $n_1 + n_3 + n_4 = 12$ et $n_1 + n_4 + n_7 = 12$ et on conclut comme précédemment. Un triangle 19-magique est proposé ci-dessous :



Triangle 19-magique

6) S'il existe un triangle S-magique, le triangle (40 - S) -magique s'obtient en remplaçant n_i par $10-n_i$ pour i variant de 1 à 9.
7) Il existe au moins un triangle S-magique pour S = 17 et S = 40-17 = 23, pour S = 19 et S = 40-19 = 21, pour S = 20.
   Il n'existe pas de triangle 18 ou 40-18=22-magique.

EXERCICE 2



1) Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur L =16 et de largeur l = 8 . On pourra noter c la longueur du côté du losange.

2) Dans la configuration précédente, la longueur c du côté du losange vérifie $8^2 + (16 - c)^2 = c^2$ donc c =10.

3) On désigne par L et l les dimensions du rectangle ($l \leq L$). On doit avoir d'après ce qui précède : $7{,}5^2 = l^2 + (L - 7{,}5)^2$ soit avec $L \geq 8$, $l^2 = L(15 - L)$ ce qui n'est vérifié en nombres entiers que pour $L = 12$ et $l = 6$.

4) L'aire du losange est $lL - l(L - c) = 0{,}75lL$.
On en déduit que $c = 0{,}75L$ et, puisque $2c = l^2 + L^2$
$l = \frac{\sqrt{2}}{2} L$

5) Les notations sont celles de la figure ci-dessus. Le pliage équivaut à une symétrie s d'axe (AC).
On a $s(A) = A$, $s'(C) = C$, $s(B) = B'$, $s(E') = E$ où E est le point d'intersection des droites $(AB) = s(AB')$ et $s(CD)$.
On en déduit que $CE = CE'$ et que $AE = AE'$.
Par ailleurs, les droites (AE) et (CE') étant parallèles et les angles $\widehat{ECA}$ et $\widehat{ACE}$ étant égaux, on en déduit que les triangles AEC et AE'C sont isocèles. AECE' est bien un losange.

EXERCICE 3 : les nombres « sigma »

1) 69 admet 4 diviseurs positifs : 1, 3, 23, 69, et 4 ne divise pas 69.
Donc 69 n'est pas « sigma ».
2) Le seul nombre premier « sigma » est 2 car si p est un nombre premier impair, p admet exactement 2 diviseurs positifs, et 2 ne divise pas p.
3) Si N est supérieur à 1, impair et « sigma », alors N admet une décomposition en facteurs premiers :
$N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec $2 < p_1 < \dots p_r$, où les α_i sont des entiers non nuls tels que $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ divise N.
La décomposition de 2N est alors : $2N = 2 \times p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ ce qui montre que le nombre de diviseurs de 2N est le double de celui de N.
Donc ce nombre divise 2N , ce qui prouve que 2N est « sigma ».
4) Si N =1, le cas est trivial : 1 est « sigma » et c'est un carré.
Si $N \geq 2$, N admet une décomposition en facteurs premiers
$N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec $2 < p_1 < \dots p_r$, où les α_i sont des entiers non nuls tels que $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ divise N.
cela impose que tous les facteurs $(\alpha_i + 1)$ soient impairs, donc que tous les α_i soient pairs : il existe β_i tel que $\alpha_i = 2\beta_i$. Ainsi $N = \left(p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}\right)^2$

La réciproque est fausse : 25 est un carré parfait impair qui n'est pas « sigma », car 25 admet 3 diviseurs.

5) Si p est un nombre premier impair, p^{p-1} est impair et admet p diviseurs ; comme p divise p^{p-1}, ce nombre est « sigma ».
Comme il existe une infinité de nombres premiers, il en résulte qu'il existe une infinité de nombres« sigma ».

EXERCICE 4 : « concourantes ou parallèles »

1) Dans ce cas , les quadrilatères PBQM et MRDS sont des carrés, les angles $\widehat{BPQ}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MSR}$ mesurent 45° et les droites (AC), (PQ) et (RS) sont parallèles.
2) Les droites (AC), (PQ) et (RS) ont pour équations respectives y = x, 4x – 9y = 1, -8x + 3y = 1, elles sont concourantes au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$
3) Appelons (a,b) , les coordonnées de M dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$
Les équations des droites (PQ) et (RS) sont respectivement :
bx + (a – 1)y = ab et (b – 1)x + ay = ab
Le système : $\begin{cases} bx+(a-1)y=ab \\ (b-1)x+ay=ab \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} bx+(a-1)y=ab \\ (a+b-1)x=ab \end{cases}$
Si $a+b-1=0$ c'est-à-dire si le point M appartient à la droite (BD), alors les droites (AC), (PQ) et (RS) ont pour équations respectives $y=x$, $y=x-a$, $y=x+b$ et sont parallèles.
Si $a+b-1 \neq 0$ alors elles sont concourantes au point de coordonnées $\left(\frac{ab}{a+b-1},\frac{ab}{a+b-1}\right)$