OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
SESSION 2009 - CORRIGÉ

EXERCICE 1

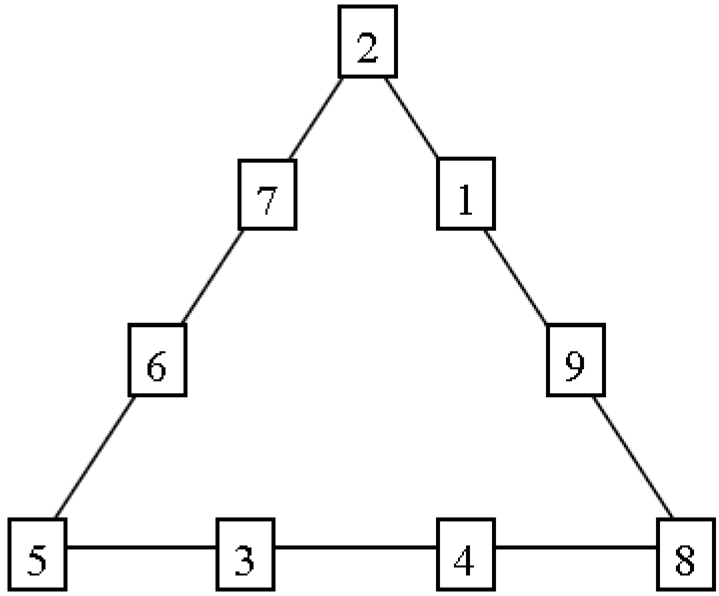
♦ Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1) La plus petite valeur possible pour leur somme est $1+2+3=6$
2) La plus grande valeur possible pour leur somme est $7+8+9=24$.

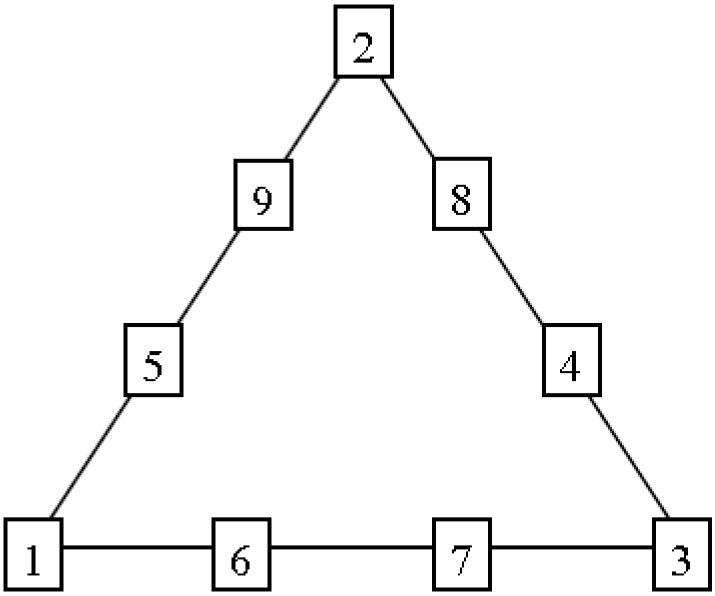
♦ Partie B : Les triangles magiques :

1) Dans cette question, on pose $n_1 = 2$, $n_4 = 5$ et $n_7 = 8$.
   On obtient le triangle 20-magique ci dessous (pas de justification demandée)



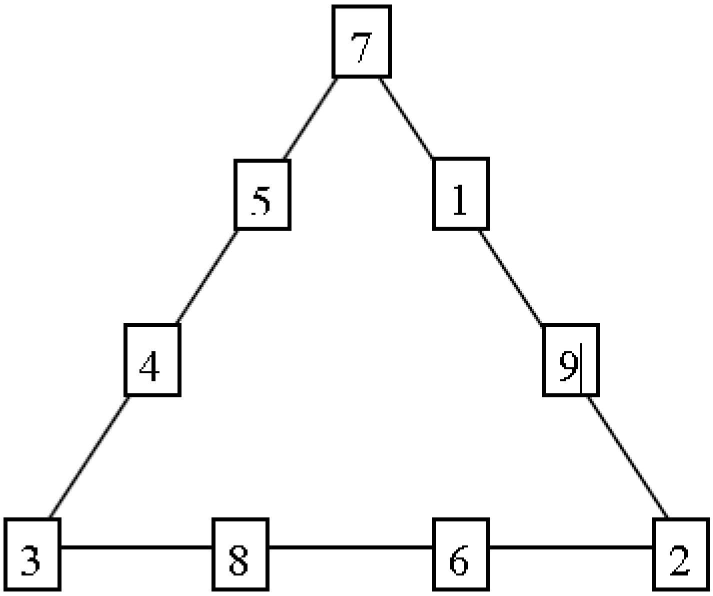
Triangle 20-magique

2) On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a. $45 + T = 3S$ puisque $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 3S - T$.
   b. D'après le préliminaire, $6 \leq T \leq 24$ donc $6 \leq 3S - 45 \leq 24$ et $17 \leq S \leq 23$.
   c. Selon les valeurs successives de S, on a :
      (17,6), (18,9), (19,12), (20,15), (21,18), (22,21), (23, 24).
3) Si $S = 17$, $T = 6$, les nombres placés aux sommets sont donc 1, 2, 3, un tel triangle est proposé ci-dessous :



Triangle 17-magique

4) Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
   Si un tel triangle existe, T = 9 donc le chiffre 9 n'est pas sur un sommet, il est donc sur un côté par exemple $n_2 = 9$.
   Il vient $n_1 + n_3 + n_4 = 9$ et $n_1 + n_4 + n_7 = 9$ d'où
   $n_3 = n_7$ ce qui est exclu.
5) Supposons que $n_2 = 7$, alors $n_1 + n_3 + n_4 = 12$ et $n_1 + n_4 + n_7 = 12$ et on conclut comme précédemment. Un triangle 19-magique est proposé ci-dessous :



Triangle 19-magique

6) S'il existe un triangle S-magique, le triangle (40 - S) -magique s'obtient en remplaçant n_i par $10-n_i$ pour i variant de 1 à 9.
7) Il existe au moins un triangle S-magique pour S = 17 et S = 40-17 = 23, pour S = 19 et S = 40-19 = 21, pour S = 20.
   Il n'existe pas de triangle 18 ou 40-18=22-magique.