OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES
SESSION 2009 - CORRIGÉ

EXERCICE 3 : les nombres « sigma »

1) 69 admet 4 diviseurs positifs : 1, 3, 23, 69, et 4 ne divise pas 69.
   Donc 69 n'est pas « sigma ».
2) Le seul nombre premier « sigma » est 2 car si p est un nombre premier impair, p admet exactement 2 diviseurs positifs, et 2 ne divise pas p.
3) Si N est supérieur à 1, impair et « sigma », alors N admet une décomposition en facteurs premiers :
   $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec $2 < p_1 < \dots p_r$, où les α_i sont des entiers non nuls tels que
   $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ divise N.
   La décomposition de 2N est alors : $2N = 2 \times p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ ce qui montre que le nombre de diviseurs de 2N est le double de celui de N.
   Donc ce nombre divise 2N , ce qui prouve que 2N est « sigma ».
4) Si N =1, le cas est trivial : 1 est « sigma » et c'est un carré.
   Si $N \geq 2$, N admet une décomposition en facteurs premiers
   $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec $2 < p_1 < \dots p_r$, où les α_i sont des entiers non nuls tels que
   $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ divise N.
   cela impose que tous les facteurs $(\alpha_i + 1)$ soient impairs, donc que tous les α_i soient pairs : il existe β_i tel que $\alpha_i = 2\beta_i$. Ainsi $N = \left(p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}\right)^2$
   La réciproque est fausse : 25 est un carré parfait impair qui n'est pas « sigma », car 25 admet 3 diviseurs.
5) Si p est un nombre premier impair, p^{p-1} est impair et admet p diviseurs ; comme p divise p^{p-1}, ce nombre est « sigma ».
   Comme il existe une infinité de nombres premiers, il en résulte qu'il existe une infinité de nombres« sigma ».