OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1

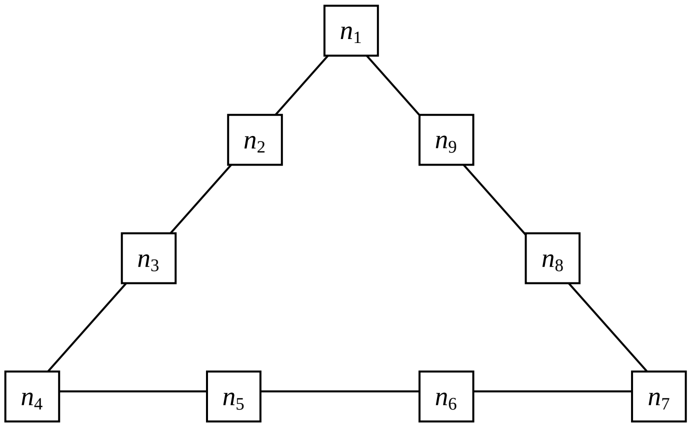
Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1) Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2) Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

On dit que le triangle est S-magique si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S . On a dans ce cas :
$S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_1 + n_9 + n_8 + n_7 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7$.



On se propose dans cet exercice, de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1) Dans cette question, on pose $n_1 = 2$, $n_4 = 5$ et $n_7 = 8$
   Compléter le triangle de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.
2) On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a) Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   b) En déduire qu'on a $17 \le S \le 23$.
   c) Donner la liste des couples (S,T) ainsi envisageables.
3) Proposer un triangle 17-magique.
4) Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5) Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   Proposer un triangle 19-magique.
6) Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.
7) Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?