OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 3 : les nombres « *sigma* »

Prérequis – Dans cet exercice, on suppose connus les deux résultats suivants :

- *il existe une infinité de nombres premiers ;*
- *si un entier N supérieur ou égal à 2 admet la décomposition en facteurs premiers :* $N = p^a \times q^b \times ...$ *, où p, q, … sont des nombres premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de N est égal à :* $(a+1)\times(b+1)\times...$*. Par exemple* $12 = 2^2 \times 3^1$ *admet* $3\times 2 = 6$ *diviseurs :* 1, 2, 3, 4 , 6 *et* 12.

On dit qu'un nombre entier naturel non nul est « *sigma* » lorsqu'il est divisible par le nombre de ses diviseurs positifs. Par exemple, 12 est « *sigma* » car il possède 6 diviseurs positifs et 6 divise 12. En revanche, 22 n'est pas « *sigma* » car il possède 4 diviseurs positifs : 1, 2, 11, 22, et 4 ne divise pas 22.

69 est-il « *sigma* »? 84 est-il « *sigma* »?
Un nombre premier peut-il être « *sigma* » ?
Démontrer que si N est un entier « *sigma* » impair supérieur à 1, alors l'entier $2N$ est « *sigma* ».
Démontrer que si N est un entier « *sigma* » impair, alors N est nécessairement un carré parfait. La réciproque est-elle vraie ?
Démontrer qu'il existe une infinité de nombres « *sigma* ».