OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

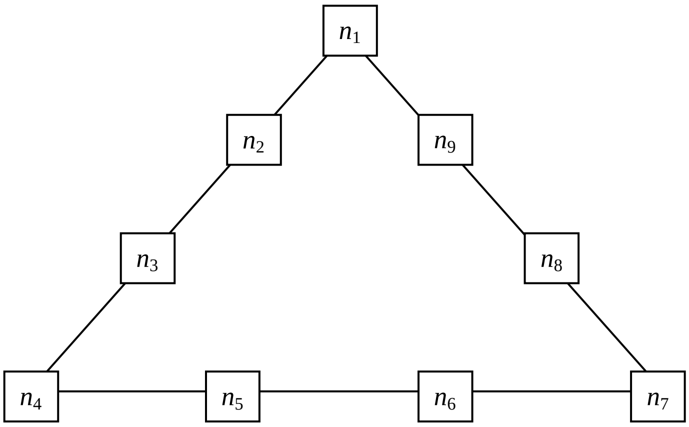
EXERCICE 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1) Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2) Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On dit que le triangle est S-magique si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S . On a dans ce cas :
$S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_1 + n_9 + n_8 + n_7 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7$.

On se propose dans cet exercice, de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1) Dans cette question, on pose $n_1 = 2$, $n_4 = 5$ et $n_7 = 8$
   Compléter le triangle de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.
2) On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a) Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   b) En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$.
   c) Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
3) Proposer un triangle 17-magique.
4) Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5) Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   Proposer un triangle 19-magique.
6) Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.
7) Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

EXERCICE 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.
<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).
L'unité de longueur choisie est le centimètre.

Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$. On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.
On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers. Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.
Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

EXERCICE 3 : les nombres « *sigma* »

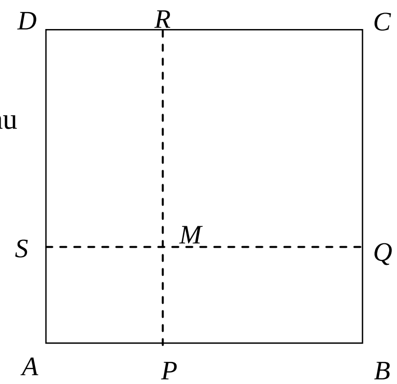
Prérequis – Dans cet exercice, on suppose connus les deux résultats suivants :

- *il existe une infinité de nombres premiers ;*
- *si un entier N supérieur ou égal à 2 admet la décomposition en facteurs premiers :* $N = p^a \times q^b \times \ldots$ *, où p, q, … sont des nombres premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de N est égal à :* $(a+1)\times(b+1)\times\ldots$. *Par exemple* $12 = 2^2 \times 3^1$ *admet* $3\times 2 = 6$ *diviseurs :* 1, 2, 3, 4 , 6 *et* 12.

On dit qu'un nombre entier naturel non nul est « *sigma* » lorsqu'il est divisible par le nombre de ses diviseurs positifs. Par exemple, 12 est « *sigma* » car il possède 6 diviseurs positifs et 6 divise 12. En revanche, 22 n'est pas « *sigma* » car il possède 4 diviseurs positifs : 1, 2, 11, 22, et 4 ne divise pas 22.

69 est-il « *sigma* »? 84 est-il « *sigma* »?
Un nombre premier peut-il être « *sigma* » ?
Démontrer que si N est un entier « *sigma* » impair supérieur à 1, alors l'entier $2N$ est « *sigma* ».
Démontrer que si N est un entier « *sigma* » impair, alors N est nécessairement un carré parfait. La réciproque est-elle vraie ?
Démontrer qu'il existe une infinité de nombres « *sigma* ».

EXERCICE 4 : « concourantes ou parallèles »



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 1, M est un point intérieur au carré, les quadrilatères $APMS$ et $MQCR$ sont des rectangles.

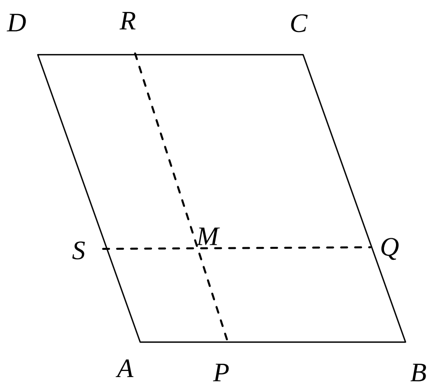
Premier cas particulier

Dans cette question, on suppose que $AP = \frac{3}{4}$ et que $AS = \frac{1}{4}$.

Démontrer que les droites (AC), (PQ) et (RS) sont parallèles.

Deuxième cas particulier. Dans cette question, on suppose que $AP = \frac{1}{4}$ et que $AS = \frac{1}{3}$.

Déterminer une équation des droites (PQ) et (RS) dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ et en déduire que les droites (AC), (PQ) et (RS) sont concourantes.



Généralisation
Cette fois $ABCD$ est un parallélogramme, M est un point intérieur à ce parallélogramme et les quadrilatères $APMS$ et $MQCR$ sont des parallélogrammes.
Démontrer que les droites (AC), (PQ) et (RS) sont en général concourantes sauf pour certaines positions particulières de M que l'on précisera.