OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CORRIGE (Possible mais non unique)

EXERCICE 1

1) On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2) Question de rayons
   a. Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D. La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30°$, donc $\widehat{BCD} = 60°$. Puisque $BC = DC$, le triangle BCD est donc équilatéral. D'autre part $\widehat{BDA} = 30°$ donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $BD = BA$. Finalement, on trouve bien $AB = BC$.
   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle. En appliquant le résultat précédent, il vient $AE = 2r$ et comme $EB = r$, on obtient $AB = R = 3r$.
3) On doit avoir $AD = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.
4) Si $r = \frac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du petit triangle est $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

   D'autre part, on a : $R = 3r = \frac{3}{2}$, donc l'aire du grand triangle est $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

   L'aire de la partie colorée située à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant à l'aire du grand triangle : l'aire du petit triangle, celle du secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et celle du secteur $\widehat{BCD}$.

   Cette aire est donc égale à : $a = \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} - \frac{9\pi}{24} = \sqrt{3} - \frac{11\pi}{24}$. L'aire totale est donc 12a.