OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CORRIGE (Possible mais non unique)

EXERCICE 1

1) On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2) Question de rayons
   a. Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D. La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30°$, donc $\widehat{BCD} = 60°$. Puisque $BC = DC$, le triangle BCD est donc équilatéral. D'autre part $\widehat{BDA} = 30°$ donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $BD = BA$. Finalement, on trouve bien $AB = BC$.
   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle. En appliquant le résultat précédent, il vient $AE = 2r$ et comme $EB = r$, on obtient $AB = R = 3r$.
3) On doit avoir $AD = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.
4) Si $r = \frac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du petit triangle est $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

   D'autre part, on a : $R = 3r = \frac{3}{2}$, donc l'aire du grand triangle est $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

   L'aire de la partie colorée située à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant à l'aire du grand triangle : l'aire du petit triangle, celle du secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et celle du secteur $\widehat{BCD}$.

   Cette aire est donc égale à : $a = \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} - \frac{9\pi}{24} = \sqrt{3} - \frac{11\pi}{24}$. L'aire totale est donc 12a.

EXERCICE 2

1) Exemples
   a. Il existe au moins un nombre premier dans chaque dizaine, donc on peut transformer tout nombre non premier en nombre premier en modifiant le chiffre des unités.
   b. 100 n'est pas premier et 101 est premier, donc 100 est un nombre quasi-premier.
2) Il existe une infinité de nombres premiers, donc une infinité de dizaines contenant un nombre premier. Choisissons un nombre premier dans chacune de ces dizaines, à partir de 10, et changeons son chiffre des unités en zéro (ou en cinq) ; le nombre obtenu est différent de 5 et il est divisible par 5, donc il n'est pas premier. Ces nombres sont donc des nombres quasi-premiers et, étant distincts deux à deux (car situés dans des dizaines différentes), il y en a une infinité.
3) Encore des infinités
   a. 200 n'est pas premier. Si l'on veut modifier un chiffre pour obtenir un nombre premier, ce doit être nécessairement le chiffre des unités (car sinon, le nombre obtenu reste divisible par 10). Or aucun des nombres 201, 202, …, 209 n'est premier. Donc 200 n'est ni premier ni quasi-premier.
   b. Le nombre $a_k = 2310k + 200$ n'est pas premier (car divisible par 10). Si l'on veut modifier un chiffre pour obtenir un nombre premier, ce doit être nécessairement le chiffre des unités (car sinon, le nombre obtenu reste divisible par 10). Or, $a_k + 1$, $a_k + 4$ et $a_k + 7$ sont divisibles par 3, $a_k + 2$, $a_k + 6$ et $a_k + 8$ sont divisibles par 2, $a_k + 5$ est divisible par 5, $a_k + 3$ est divisible par 7, et enfin $a_k + 9$ est divisible par 11. Aucun de ces nombres n'est premier, donc a_k n'est pas quasi-premier.
   c. Les nombres $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts et forment donc une infinité de nombres qui ne sont ni premiers ni quasi premiers.
4) Des nombres à la chaîne
   a. Les nombres {90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96} ne sont pas premiers et on peut obtenir le nombre premier 97 en modifiant leur chiffre des unités. Ce sont donc des nombres quasi-premiers.
   b. On peut trouver une telle liste d'ordre supérieur à partir de « trous » plus importants dans la répartition des nombres premiers : {114 ; 115 ; … ; 126} est une telle liste d'ordre 13.

EXERCICE 3

1) Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on n'a que deux possibilités :
   $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. La chaîne peut-être prolongée en : «7 5 9 4 6».
2) Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ».
3) La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.
4) Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment. Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x - 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.
5) On trouve :
   a. Si $b = a$, le prolongement est « a b 0 ».
   b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
   c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « a b $(11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$. Si $a < b$, « a b $(b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$. Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.
6) **1er cas** : **si $a = b$**

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.

Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.

Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a a ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2^{e} cas : $a = b + 1$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3^{e} cas : $a = 0$ et $b = 1$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4^{e} cas : $0 < a < b$,

« a b $(b - a)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(11 + a - b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5^{e} cas : Si $b = 0$ et $a > 1$

le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6^{e} cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figurent 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

EXERCICE 4

Partie A

1) Résolution de l'équation.
   a. Si (a,b) est un couple d'entiers solution (ce qui impose $a \le b$), on obtient la relation cherchée en multipliant les deux membres par $\sqrt{ab}$ et en élevant au carré.
   b. La relation précédente impose à a d'être un carré parfait d'où le résultat.
2) Les couples solution sont nécessairement du type précédent, réciproquement, tout couple $\left(n^2,(n+1)^2\right)$ où n est un entier non nul convient.

Partie B

1) Soit T le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles et de la droite d. On a successivement : $BT^2 = JT^2 + b^2 = \frac{1}{4}JK^2 + b^2$, $CT^2 = KT^2 + c^2 = \frac{1}{4}JK^2 + c^2$ et $BT^2 + CT^2 = (b+c)^2$ puisque les tangentes issues de T ont même longueur. La relation cherchée en découle.
2) D'après ce qui précède, on a $IJ^2 = 4ab$, $IK^2 = 4ac$, $JK^2 = 4bc$. Puisque $JK = IJ + IK$, il vient : $2\sqrt{bc} = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$ et la relation cherchée en divisant par $\sqrt{abc}$.
3) a) Il suffit de reprendre les solutions de la partie A.
   b) $2010 = 67\times5\times3\times2$. Il n'existe aucun carré dans la décomposition de 2010 en produit de facteurs, mais le triplet (1,4,4) convenant d'après la partie A, le triplet (2010, 8040, 8040) correspondant à une figure homothétique convient.