OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CORRIGE (Possible mais non unique)

EXERCICE 2

1) Exemples
   a. Il existe au moins un nombre premier dans chaque dizaine, donc on peut transformer tout nombre non premier en nombre premier en modifiant le chiffre des unités.
   b. 100 n'est pas premier et 101 est premier, donc 100 est un nombre quasi-premier.
2) Il existe une infinité de nombres premiers, donc une infinité de dizaines contenant un nombre premier. Choisissons un nombre premier dans chacune de ces dizaines, à partir de 10, et changeons son chiffre des unités en zéro (ou en cinq) ; le nombre obtenu est différent de 5 et il est divisible par 5, donc il n'est pas premier. Ces nombres sont donc des nombres quasi-premiers et, étant distincts deux à deux (car situés dans des dizaines différentes), il y en a une infinité.
3) Encore des infinités
   a. 200 n'est pas premier. Si l'on veut modifier un chiffre pour obtenir un nombre premier, ce doit être nécessairement le chiffre des unités (car sinon, le nombre obtenu reste divisible par 10). Or aucun des nombres 201, 202, …, 209 n'est premier. Donc 200 n'est ni premier ni quasi-premier.
   b. Le nombre $a_k = 2310k + 200$ n'est pas premier (car divisible par 10). Si l'on veut modifier un chiffre pour obtenir un nombre premier, ce doit être nécessairement le chiffre des unités (car sinon, le nombre obtenu reste divisible par 10). Or, $a_k + 1$, $a_k + 4$ et $a_k + 7$ sont divisibles par 3, $a_k + 2$, $a_k + 6$ et $a_k + 8$ sont divisibles par 2, $a_k + 5$ est divisible par 5, $a_k + 3$ est divisible par 7, et enfin $a_k + 9$ est divisible par 11. Aucun de ces nombres n'est premier, donc a_k n'est pas quasi-premier.
   c. Les nombres $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts et forment donc une infinité de nombres qui ne sont ni premiers ni quasi premiers.
4) Des nombres à la chaîne
   a. Les nombres {90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96} ne sont pas premiers et on peut obtenir le nombre premier 97 en modifiant leur chiffre des unités. Ce sont donc des nombres quasi-premiers.
   b. On peut trouver une telle liste d'ordre supérieur à partir de « trous » plus importants dans la répartition des nombres premiers : {114 ; 115 ; … ; 126} est une telle liste d'ordre 13.