OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CORRIGE (Possible mais non unique)

EXERCICE 3

1) Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on n'a que deux possibilités :
$9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. La chaîne peut-être prolongée en : «7 5 9 4 6».

2) Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ».

3) La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.

4) Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x - 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

5) On trouve :
   a. Si $b = a$, le prolongement est « a b 0 ».
   b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
   c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « a b $(11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$. Si $a < b$, « a b $(b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$. Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

6) **1er cas : si $a = b$**

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.

Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.

Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a a ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2^{e} cas : $a = b + 1$

la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3^{e} cas : $a = 0$ et $b = 1$

« 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4^{e} cas : $0 < a < b$,

« a b $(b - a)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(11 + a - b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si

- $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
- $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5^{e} cas : Si $b = 0$ et $a > 1$

le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6^{e} cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figurent 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	