OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CORRIGE (Possible mais non unique)

EXERCICE 4

Partie A

1) Résolution de l'équation.
   a. Si (a,b) est un couple d'entiers solution (ce qui impose $a \leq b$), on obtient la relation cherchée en multipliant les deux membres par $\sqrt{ab}$ et en élevant au carré.
   b. La relation précédente impose à a d'être un carré parfait d'où le résultat.
2) Les couples solution sont nécessairement du type précédent, réciproquement, tout couple $\left(n^2,(n+1)^2\right)$ où n est un entier non nul convient.

Partie B

1) Soit T le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles et de la droite d. On a successivement : $BT^2 = JT^2 + b^2 = \frac{1}{4}JK^2 + b^2$, $CT^2 = KT^2 + c^2 = \frac{1}{4}JK^2 + c^2$ et $BT^2 + CT^2 = (b+c)^2$ puisque les tangentes issues de T ont même longueur. La relation cherchée en découle.
2) D'après ce qui précède, on a $IJ^2 = 4ab,\ IK^2 = 4ac,\ JK^2 = 4bc$. Puisque $JK = IJ + IK$, il vient : $2\sqrt{bc} = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$ et la relation cherchée en divisant par $\sqrt{abc}$.
3) a) Il suffit de reprendre les solutions de la partie A.
   b) $2010 = 67 \times 5 \times 3 \times 2$. Il n'existe aucun carré dans la décomposition de 2010 en produit de facteurs, mais le triplet (1,4,4) convenant d'après la partie A, le triplet (2010, 8040, 8040) correspondant à une figure homothétique convient.