

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 2- Nombres quasi-premiers (*exercice académique*)

On rappelle qu'un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs. La liste des nombres premiers commence ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., et cette liste est infinie.

On dit qu'un nombre entier naturel non nul est un nombre *quasi-premier* si ce nombre n'est pas premier et si, en modifiant un et un seul des chiffres de l'écriture en base dix de ce nombre, on obtient un nombre premier. *Par exemple 24 est un nombre quasi-premier car il n'est pas premier et 23 est premier.*

- 1) Quelques exemples
 - a) Démontrer que tout entier non nul inférieur à 100 est soit premier, soit quasi-premier.
 - b) Quelle est la nature du nombre 100 ?
- 2) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres quasi-premiers.
- 3) Encore des infinités
 - a) Démontrer que le nombre 200 n'est ni premier ni quasi-premier.
 - b) Soit k un entier naturel. Le nombre $2310k + 200$ peut-il être premier ? Peut-il être quasi-premier ?
 - c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres qui ne sont ni premiers ni quasi-premiers.
- 4) Des nombres à la chaîne
 - a) Peut-on trouver une liste de 7 entiers consécutifs qui soient des nombres quasi-premiers ?
 - b) Peut-on trouver une telle liste de longueur supérieure à 7 formée uniquement de nombres quasi-premiers ?