**OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES**

SESSION 2010

**CLASSE DE PREMIERE**

DUREE : 4 heures.

*Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.*

**EXERCICE 3** : **A la recherche du « chaînonze ».** (*exercice national*)

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
*« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».*
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.
On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze. Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1) Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?
2) Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
3) Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010e chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

4) Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

5) On considère la chaîne « $a$ $b$ » où $a$ et $b$ sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
   a) Étudier le cas particulier « $a$ $a$ ».
   b) Étudier le cas $b = a - 1$.
   c) Étudier les autres cas.

6) Démontrer qu'en prolongeant la chaîne « $a$ $b$ » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.