OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

CLASSE DE PREMIERE

DUREE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 4 : Droites et cercles tangents (*exercice académique*)

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls (a,b) qui vérifient l'équation :

$$(\mathbf{E}) : \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

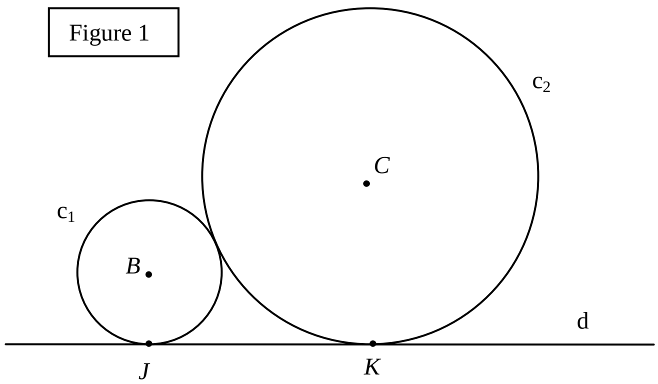
1) On suppose que (a,b) est un couple d'entiers naturels solution de (**E**).
   a) Démontrer que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.
   b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on ait ; $a = n^2$ et $b = (n+1)^2$.
2) Résoudre l'équation (**E**).

Partie B

1) Deux cercles c_1 et c_2 de centres respectifs B et C, de rayons respectifs b et c sont situés du même côté d'une droite d, tangents à cette droite respectivement en J et K, et tangents entre eux (figure 1).

   Démontrer l'égalité $KJ^2 = 4bc$.

Figure 1



2) On reprend la figure 1, et l'on rajoute un cercle c_3 de centre A et de rayon a, qui est tangent à la droite d en I, et tangent extérieurement aux cercles c_1 et c_2 (figure 2).

   Démontrer l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

3) On considère la figure de la question 2.
   a) Donner une infinité de cas où les trois rayons sont des entiers, l'un étant le produit des deux autres.
   b) Donner un cas où les trois rayons sont des entiers et où le rayon du petit cercle est égal à 2010.

Figure 2