**OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES**

SESSION 2010

**CLASSE DE PREMIERE**

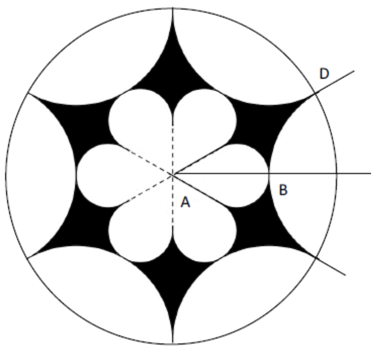
DUREE : 4 heures.

*Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.*

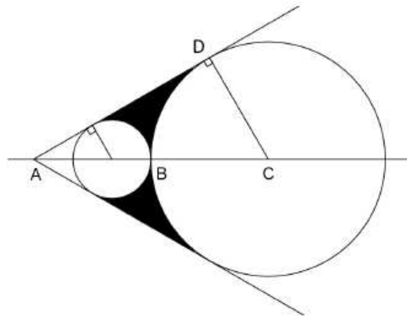
**EXERCICE 1 : La rosace** (*exercice national*)

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

1) Dans le motif ci-contre, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles, issues de $A$ ?




**Rosace**




**Motif**

2) Question de rayons
   a) Montrer que $AB = BC$ .
   b) Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
   c) D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$ .
   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3) On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

**EXERCICE 2- Nombres quasi-premiers** (*exercice académique*)

On rappelle qu'un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs. La liste des nombres premiers commence ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …., et cette liste est infinie.
On dit qu'un nombre entier naturel non nul est un nombre *quasi-premier* si ce nombre n'est pas premier et si, en modifiant un et un seul des chiffres de l'écriture en base dix de ce nombre, on obtient un nombre premier. *Par exemple 24 est un nombre quasi premier car il n'est pas premier et 23 est premier*.

1) Quelques exemples
   a) Démontrer que tout entier non nul inférieur à 100 est soit premier, soit quasi-premier.
   b) Quelle est la nature du nombre 100 ?

2) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres quasi-premiers.

3) Encore des infinités
   a) Démontrer que le nombre 200 n'est ni premier ni quasi-premier.
   b) Soit $k$ un entier naturel. Le nombre $2310k + 200$ peut-il être premier ? Peut-il être quasi-premier ?
   c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres qui ne sont ni premiers ni quasi-premiers.

4) Des nombres à la chaîne
   a) Peut-on trouver une liste de 7 entiers consécutifs qui soient des nombres quasi-premiers ?
   b) Peut-on trouver une telle liste de longueur supérieure à 7 formée uniquement de nombres quasi-premiers ?

**EXERCICE 3** : **A la recherche du « chaînonze ».** (*exercice national*)

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
*« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».*
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.
On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze. Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1) Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?
2) Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
3) Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010e chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

4) Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de $n$ chiffres se répétant indéfiniment.

5) On considère la chaîne « $a$ $b$ » où $a$ et $b$ sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
   a) Étudier le cas particulier « $a$ $a$ ».
   b) Étudier le cas $b = a - 1$.
   c) Étudier les autres cas.

6) Démontrer qu'en prolongeant la chaîne « $a$ $b$ » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

**EXERCICE 4 : Droites et cercles tangents** (*exercice académique*)

**Partie A**

Le but de cette partie est de déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls $(a,b)$ qui vérifient l'équation :

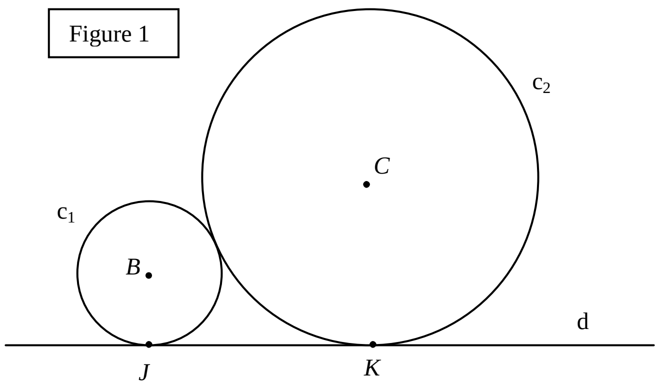
$$(\mathbf{E}) :. \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

1) On suppose que $(a,b)$ est un couple d'entiers naturels solution de (**E**).
   a) Démontrer que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.
   b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul $n$ tel que l'on ait ; $a = n^2$ et $b = (n+1)^2$.
2) Résoudre l'équation (**E**).

**Partie B**

1) Deux cercles $c_1$ et $c_2$ de centres respectifs $B$ et $C$, de rayons respectifs $b$ et $c$ sont situés du même côté d'une droite d, tangents à cette droite respectivement en $J$ et $K$, et tangents entre eux (figure 1).

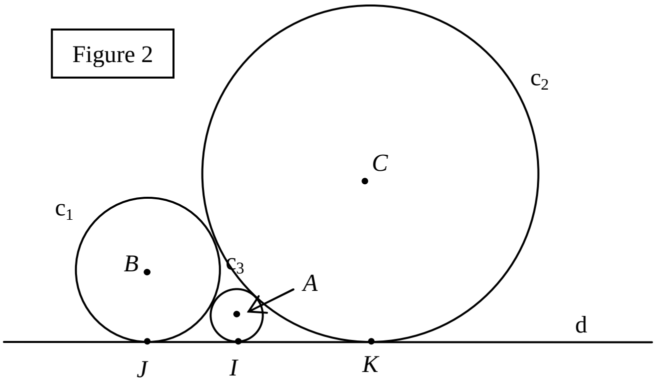
   Démontrer l'égalité $KJ^2 = 4bc$.



2) On reprend la figure 1, et l'on rajoute un cercle $c_3$ de centre $A$ et de rayon $a$, qui est tangent à la droite d en $I$, et tangent extérieurement aux cercles $c_1$ et $c_2$ (figure 2).

Démontrer l'égalité $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Figure 2




3) On considère la figure de la question 2.
   a) Donner une infinité de cas où les trois rayons sont des entiers, l'un étant le produit des deux autres.
   b) Donner un cas où les trois rayons sont des entiers et où rayon du petit cercle est égal à 2010.