Olympiades de mathématiques 2011
Éléments de correction

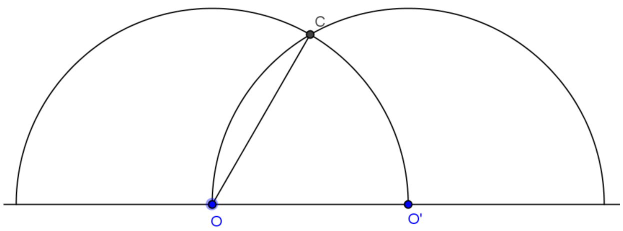
Exercice 1 national : essuie-glaces

1. L'aire demandée en cm^2 est $A = \frac{1}{2}\left(\pi \times 60^2 - \pi \times 15^2\right) = \frac{3375}{2}\pi$, soit en valeur approchée 5301 cm^2.

2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons l'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur

$R\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{CO'O}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.

L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$.

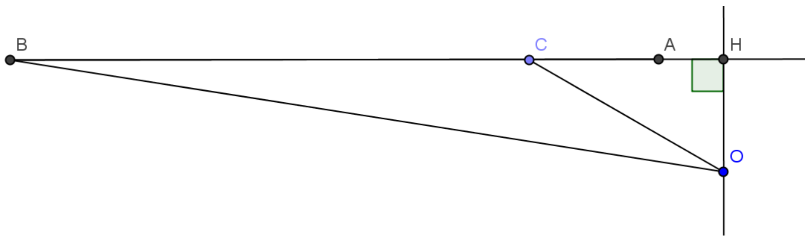
Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un disque de rayon R privée de A_3, soit

$$A = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

3.

a) $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$



soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$.

Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H,

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = (HC - CA)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 .$$

Ainsi $OA = OC$ et donc le triangle AOC est isocèle.

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le

triangle *MOP* est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2\times 30° = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180° – 60°=120°.
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [*MN*] et [*M'N'*] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$. Soient *T* et *T'* les intersections du cercle de centre *O* passant par *M* et les segments [*ON*] et [*ON'*]. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [*ON*] ayant pour image [*ON'*], *T* a donc pour image *T'*. Les points *M*,*T* et *N* ont respectivement pour images *M'*, *T'* et *N'*, et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [*MN*], [*NT*] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [*M'N'*] [*N'T'*] et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles *OMN* et *OM'N'* sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [*NT*] et [N'*T'*] et les arcs de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $A = \frac{1}{3}\left(\pi\times ON^2 - \pi\times OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *OBH* ,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $A = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = 10\,\pi\,\mathrm{a}^2$.