

# Olympiades de mathématiques 2011

## Éléments de correction

### Exercice 2 académique : nombres complices

1. a)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui
1	oui			oui					oui		
2	oui				oui						
3	oui	oui				oui			oui		
4	oui		oui				oui				
5	oui			oui				oui			
6	oui				oui				oui		
7	oui					oui				oui	
8	oui	oui		oui			oui				oui
9	oui							oui			
10	oui								oui		

Ce tableau permet de conjecturer que 0 est complice de tout entier et que tout entier  $a$  admet  $a+2$  et  $a-2$  comme complices.

b) 0 est complice de 2011 et plus généralement de tout entier  $a$  car  $0 \times a + 1 = 1^2$ .

L'entier 2013 est complice de 2011 car  $2013 \times 2011 + 1 = 4048144 = 2012^2$ .

c) Soit  $a$  un entier supérieur ou égal à 3.

Outre 0, les nombres  $a-2$  et  $a+2$  sont complices de  $a$  car  $a(a-2)+1=(a-1)^2$  et  $a(a+2)+1=(a+1)^2$ .

2. a) Soit  $n$  un entier non nul donné. Alors  $(n-1)(n+1)+1=n^2$ . Cela montre que  $n$  est associé au couple de complices  $(n-1, n+1)$ . Ce couple n'est pas unique, tout couple de diviseurs de  $n^2-1$  convient, comme par exemple  $(1, n^2-1)$ .

b) Il suffit de déterminer les diviseurs de  $2011^2-1=4044121=2^3 \times 3 \times 5 \times 67 \times 503$ . Il y a 32 paires de diviseurs, donc 64 couples. Les paires sont :

{1, 4044120}, {2, 2022060}, {3, 1348040}, {4, 1011030}, {5, 808824}, {6, 674020},  
 {8, 505515}, {10, 404412}, {12, 337010}, {15, 269608}, {20, 202206}, {24, 168505},  
 {30, 134804}, {40, 101103}, {60, 67402}, {67, 60360}, {120, 33701}, {134, 30180},  
 {201, 20120}, {268, 15090}, {335, 12072}, {402, 10060}, {503, 8040}, {536, 7545},  
 {670, 6036}, {804, 5030}, {1005, 4024}, {1006, 4020}, {1340, 3018}, {1509, 2680},  
 {1608, 2515}, {2010, 2012}.