Olympiades de mathématiques 2011
Éléments de correction

Exercice 3 académique (série S uniquement) : polygones entiers

1. **a)** $A = 70$, $C = 34$, $I = 54$.
b) $A = 8$, $C = 4$, $I = 7$.
c) $A = 21$, $C = 8$, $I = 18$.

2. On a : $A = np$, $C = 2(n+p)$, $I = (n-1)(p-1) = np-(n+p)+1$. Donc $A = \frac{C}{2} + I - 1$.

3. (P) est la « moitié » d'un rectangle ; si A', C', et I' sont ses éléments caractéristiques, on a d'après la question 2 : $A' = \frac{C'}{2} + I' - 1$. Notons D' le nombre de points entiers de la diagonale, extrémités exclues.

On a les relations : $\begin{cases} C = \frac{C'}{2} + D' + 1 \\ I = \frac{I' - D'}{2} \end{cases}$. D'où $A = \frac{1}{2}A' = \frac{1}{4}C' + \frac{1}{2}I' - \frac{1}{2} = \frac{C - D' - 1}{2} + \left(I + \frac{D'}{2}\right) - \frac{1}{2}$

$A = +I - 1$

On en déduit que : $A = \frac{C}{2} + I - 1$.

4. Notons A_1, C_1, I_1 et A_2, C_2, I_2 les éléments caractéristiques des deux polygones, A, C, I ceux du polygone final, puis D le nombre de points entiers de la frontière commune, extrémités exclues.

On a par hypothèse : $A_1 = \frac{C_1}{2} + I_1 - 1$ et $A_2 = \frac{C_2}{2} + I_2 - 1$.

D'autre part, $C = C_1 + C_2 - 2D - 2$, $I = I_1 + I_2 + D$.

On en tire :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{C_1}{2} + I_1 - 1 + \frac{C_2}{2} + I_2 - 1 = \frac{C_1 + C_2}{2} + I_1 + I_2 - 2 = \left(\frac{C}{2} + D + 1\right) + \left(I - D\right) - 2$$

D'où finalement : $A = \frac{C}{2} + I - 1$.

5.

Résultat préliminaire

Dans la configuration de la question 4, avec les mêmes notations, supposons que $A_1 = \frac{C_1}{2} + I_1 - 1$ et $A = \frac{C}{2} + I - 1$, on en déduit facilement que $A_2 = \frac{C_2}{2} + I_2 - 1$.

Comme tout polygone entier se décompose en triangles entiers ayant une frontière commune, il suffit de prouver le résultat pour un triangle entier, et d'appliquer 4.

Soit (T) un triangle entier ayant un côté parallèle à un axe. En traçant la hauteur issue du sommet opposé, (T) est découpé en deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes. D'après 4, la formule s'applique à (T).

Soit (T) un triangle entier n'ayant aucun côté parallèle à un axe.

Si (T) est acutangle, en traçant les parallèles aux axes passant les sommets et qui ne coupent pas le triangle, on obtient un rectangle découpé en quatre triangles : le triangle (T) et trois triangles rectangles. En appliquant 2, 3, et le résultat préliminaire, on en déduit que la formule s'applique à (T).

Si (T) est obtusangle, en traçant les parallèles aux axes passant par les sommets des angles aigus, on obtient un triangle rectangle découpé en trois triangles : le triangle (T) et deux triangles ayant un côté parallèle à un axe. En appliquant les résultats précédents on en déduit encore que la formule s'applique à (T).