Olympiades de mathématiques 2011
Éléments de correction

Exercice 4 national : le singe sauteur

1. Le nombre 4 est atteignable car $1+2-3+4=4$.

2. Le singe n'a pas le choix : $1+2-3+4$ et … il est bloqué !!

3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1+2+3-4+5-6+7-8+9=9$, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].

4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner $1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16=16$, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+\cdots+n+\left[-(n+1)+(n+2)\right]+\left[-(n+3)+(n+4)\right]+\cdots+\left[-(n^2-1)+n^2\right]$$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}+1+\cdots+1$ (n^2-n termes qui groupés par 2 donnent 1, soit $\dfrac{n^2-n}{2}$ termes égaux à 1)

On obtient donc $\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n^2-n}{2}$ soit n^2.

L'on reste bien dans l'intervalle $\left[0,n^2\right]$. D'où n^2 est atteignable.

5. **a)** Si le nombre n est atteignable, la somme se termine par $+n$, sinon on sort de l'intervalle et à l'avant-dernière étape on est en 0. Il existe donc des a_i valant 1 ou -1 tels que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=-S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\dfrac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.

Donc n est de la forme 4k ou 4k+1. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

b) La réciproque est fausse puisque 5×4 est multiple de 4 et que 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes $+-$ en $-+$, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ et l'on trouve $N+4$. Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N-1)+N$ et commence par $1+2+3$.

On note $S(i)$ la somme partielle des i-premiers termes, le premier signe – apparaissant en position $i+1$. Alors $S(i-1)\geq i$, car $S(3)\geq 4$. On change alors la sous-séquence $i-(i+1)$ en $-i+(i+1)$, ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$, ce qui assure que $N+4$ est lui aussi atteignable.