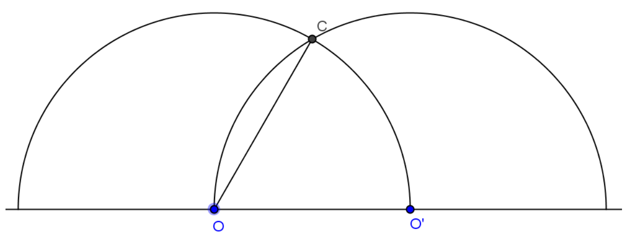
Olympiades de mathématiques 2011
Éléments de correction

Exercice 1 national : essuie-glaces

1. L'aire demandée en cm^2 est $A=\frac{1}{2}\left(\pi\times 60^2-\pi\times 15^2\right)=\frac{3375}{2}\pi$, soit en valeur approchée 5301 cm^2.

2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons l'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur
$R\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$A_1=\frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{CO'O}$: $A_2=\frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde $[OC]$ et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : A_2-A_1.

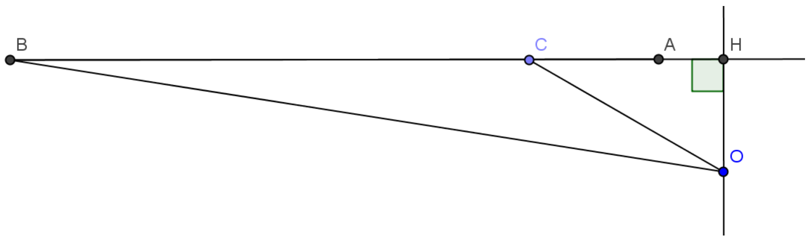
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera $A=A_2+A_2-A_1=2A_2-A_1$.

Donc $A_3=\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un disque de rayon R privée de A_3, soit

$$A=\pi R^2-\left(\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2.$$

3.



a) $\sin\widehat{OCH}=\sin 30°=\frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC}=\frac{1}{2}$

soit $OH=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc $HC=\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a$.

Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H,

$$OA^2=HA^2+HO^2=\left(HC-CA\right)^2+HO^2=\left(\frac{3}{2}a-a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=a^2.$$

Ainsi $OA=OC$ et donc le triangle AOC est isocèle.

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180-\widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le

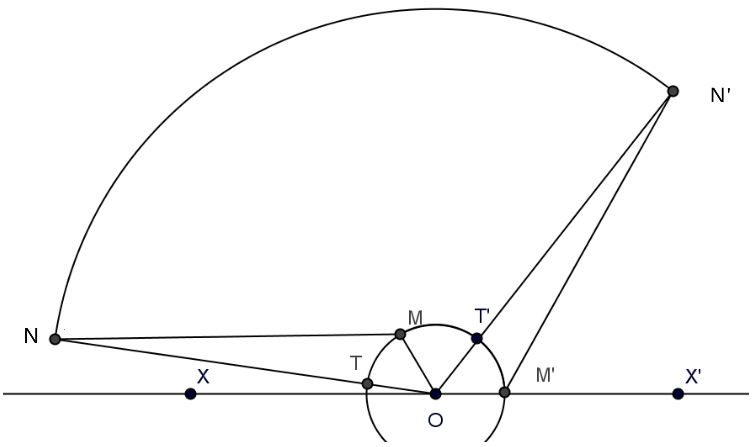
triangle *MOP* est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2\times 30° = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180° − 60°=120°.
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [*MN*] et [*M'N'*] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$. Soient *T* et *T'* les intersections du cercle de centre *O* passant par *M* et les segments [*ON*] et [*ON'*]. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [*ON*] ayant pour image [*ON'*], *T* a donc pour image *T'*. Les points *M*,*T* et *N* ont respectivement pour images *M'*, *T'* et *N'*, et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [*MN*], [*NT*] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [*M'N'*] [*N'T'*] et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles *OMN* et *OM'N'* sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [*NT*] et [N'*T'*] et les arc de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $A = \dfrac{1}{3}\left(\pi\times ON^2 - \pi\times OT^2\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH ,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $A = \dfrac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = 10\,\pi\,\mathrm{a}^2$.



Exercice 2 académique : nombres complices

1. a)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui
1	oui			oui					oui		
2	oui				oui						
3	oui	oui				oui			oui		
4	oui		oui				oui				
5	oui			oui				oui			
6	oui				oui				oui		
7	oui					oui				oui	
8	oui	oui		oui			oui				oui
9	oui							oui			
10	oui								oui		

Ce tableau permet de conjecturer que 0 est complice de tout entier et que tout entier a admet $a+2$ et $a-2$ comme complices.

b) 0 est complice de 2011 et plus généralement de tout entier a car $0\times a+1=1^2$.
L'entier 2013 est complice de 2011 car $2013\times 2011+1=4048144=2012^2$.

c) Soit a un entier supérieur ou égal à 3.
Outre 0, les nombres $a-2$ et $a+2$ sont complices de a car $a(a-2)+1=(a-1)^2$ et $a(a+2)+1=(a+1)^2$.

2. a) Soit n un entier non nul donné. Alors $(n-1)(n+1)+1=n^2$. Cela montre que n est associé au couple de complices $(n-1,n+1)$. Ce couple n'est pas unique, tout couple de diviseurs de n^2-1 convient, comme par exemple $(1,n^2-1)$.

b) Il suffit de déterminer les diviseurs de $2011^2-1=4044121=2^3\times 3\times 5\times 67\times 503$. Il y a 32 paires de diviseurs, donc 64 couples. Les paires sont :
{1, 4044120}, {2, 2022060}, {3, 1348040}, {4, 1011030}, {5, 808824}, {6, 674020}, {8, 505515}, {10, 404412}, {12, 337010}, {15, 269608}, {20, 202206}, {24, 168505}, {30, 134804}, {40, 101103}, {60, 67402}, {67, 60360}, {120, 33701}, {134, 30180}, {201, 20120}, {268, 15090}, {335, 12072}, {402, 10060}, {503, 8040}, {536, 7545}, {670, 6036}, {804, 5030}, {1005, 4024}, {1006, 4020}, {1340, 3018}, {1509, 2680}, {1608, 2515}, {2010, 2012}.

Exercice 3 académique (série S uniquement) : polygones entiers

1. **a)** $A = 70$, $C = 34$, $I = 54$.
b) $A = 8$, $C = 4$, $I = 7$.
c) $A = 21$, $C = 8$, $I = 18$.

2. On a : $A = np$, $C = 2(n+p)$, $I = (n-1)(p-1) = np-(n+p)+1$. Donc $A = \frac{C}{2}+I-1$.

3. (*P*) est la « moitié » d'un rectangle ; si A', C', et I' sont ses éléments caractéristiques, on a d'après la question 2 : $A' = \frac{C'}{2}+I'-1$. Notons D' le nombre de points entiers de la diagonale, extrémités exclues.

On a les relations : $\begin{cases} C = \frac{C'}{2}+D'+1 \\ I = \frac{I'-D'}{2} \end{cases}$. D'où $A = \frac{1}{2}A' = \frac{1}{4}C'+\frac{1}{2}I'-\frac{1}{2} = \frac{C-D'-1}{2}+\left(I+\frac{D'}{2}\right)-\frac{1}{2}$.

On en déduit que : $A = \frac{C}{2}+I-1$.

4. Notons A_1, C_1, I_1 et A_2, C_2, I_2 les éléments caractéristiques des deux polygones, *A*, *C*, *I* ceux du polygone final, puis *D* le nombre de points entiers de la frontière commune, extrémités exclues.

On a par hypothèse : $A_1 = \frac{C_1}{2}+I_1-1$ et $A_2 = \frac{C_2}{2}+I_2-1$.

D'autre part, $C = C_1+C_2-2D-2$, $I = I_1+I_2+D$.

On en tire :

$$A = A_1+A_2 = \frac{C_1}{2}+I_1-1+\frac{C_2}{2}+I_2-1 = \frac{C_1+C_2}{2}+I_1+I_2-2 = \left(\frac{C}{2}+D+1\right)+(I-D)-2.$$

D'où finalement : $A = \frac{C}{2}+I-1$.

5.

Résultat préliminaire

Dans la configuration de la question 4, avec les mêmes notations, supposons que $A_1 = \frac{C_1}{2}+I_1-1$ et $A = \frac{C}{2}+I-1$, on en déduit facilement que $A_2 = \frac{C_2}{2}+I_2-1$.

Comme tout polygone entier se décompose en triangles entiers ayant une frontière commune, il suffit de prouver le résultat pour un triangle entier, et d'appliquer 4.

Soit (*T*) un triangle entier ayant un côté parallèle à un axe. En traçant la hauteur issue du sommet opposé, (*T*) est découpé en deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes. D'après 4, la formule s'applique à (*T*).

Soit (*T*) un triangle entier n'ayant aucun côté parallèle à un axe.
Si (*T*) est acutangle, en traçant les parallèles aux axes passant les sommets et qui ne coupent pas le triangle, on obtient un rectangle découpé en quatre triangles : le triangle (*T*) et trois triangles rectangles. En appliquant 2, 3, et le résultat préliminaire, on en déduit que la formule s'applique à (*T*).

Si (*T*) est obtusangle, en traçant les parallèles aux axes passant par les sommets des angles aigus, on obtient un triangle rectangle découpé en trois triangles : le triangle (*T*) et deux triangles ayant un côté parallèle à un axe. En appliquant les résultats précédents on en déduit encore que la formule s'applique à (*T*).

Exercice 3 académique (séries autres que S) : jardins à la française

1. $\frac{DT}{DJ} = \frac{4}{5}$ et $\frac{DX}{DA} = \frac{5}{6}$. Donc (*AX*) et (*JT*) ne sont pas parallèles.

2. *EFGH* est un carré.

Dans le repère orthonormal (*A*, *I*, *J*), on a $(AX):\ y = \frac{6}{5}x$;

$(IC):\ y = \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$; $(BY):\ y = -\frac{5}{6}x + 5$; $(WD):\ y = -\frac{5}{6}x + 6$;

$E\left(\frac{150}{61}, \frac{180}{61}\right)$; $F\left(\frac{186}{61}, \frac{150}{61}\right)$; $G\left(\frac{216}{61}, \frac{186}{61}\right)$; $H\left(\frac{180}{61}, \frac{216}{61}\right)$.

3. Les points *K*, *E*, *M* ne sont pas alignés.

$(JT):\ y = \frac{5}{4}x + 1$; $(UP):\ y = -\frac{4}{5}x + 4$: $K\left(\frac{60}{41}, \frac{116}{41}\right)$;

$(VQ):\ y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2}$; $(RS):\ y = -\frac{4}{5}(x-1) + 6$; $M\left(\frac{186}{41}, \frac{130}{41}\right)$.

Exercice 4 national : le singe sauteur

1. Le nombre 4 est atteignable car $1 + 2 - 3 + 4 = 4$.

2. Le singe n'a pas le choix : $1 + 2 - 3 + 4$ et … il est bloqué !!

3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 9$, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].

4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner $1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 = 16$, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$1 + 2 + 3 + \cdots + n + [-(n+1) + (n+2)] + [-(n+3) + (n+4)] + \cdots + [-(n^2 - 1) + n^2]$

$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + \cdots + 1$ ($n^2 - n$ termes qui groupés par 2 donnent 1, soit $\frac{n^2 - n}{2}$ termes égaux à 1)

On obtient donc $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - n}{2}$ soit n^2.

L'on reste bien dans l'intervalle $[0, n^2]$. D'où n^2 est atteignable.

5. **a)** Si le nombre *n* est atteignable, la somme se termine par $+n$, sinon on sort de l'intervalle et à l'avant-dernière étape on est en 0. Il existe donc des a_i valant 1 ou -1 tels que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=-S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\dfrac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.
Donc *n* est de la forme 4*k* ou 4*k*+1. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

b) La réciproque est fausse puisque 5×4 est multiple de 4 et que 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes $+-$ en $-+$, cela va ajouter 2 au nombre *N*. Ensuite on complète par la suite $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ et l'on trouve $N+4$. Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N-1)+N$ et commence par $1+2+3$.
On note $S(i)$ la somme partielle des *i*-premiers termes, le premier signe – apparaissant en position $i+1$. Alors $S(i-1)\geq i$, car $S(3)\geq 4$. On change alors la sous-séquence $i-(i+1)$ en $-i+(i+1)$, ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$, ce qui assure que $N+4$ est lui aussi atteignable.