

Exercice 2 académique: nombres complices

On dit que deux entiers naturels a et b sont *complices* s'il existe un entier naturel n tel que $ab + 1 = n^2$. Dans ce cas, on dit que l'entier n est *associé* au couple de complices (a, b) .

1. Complices d'un entier

- a) Déterminer tous les couples d'entiers complices, compris au sens large entre 0 et 10.
- b) L'entier 2011 admet 2009 comme complice. Citer deux autres complices de 2011.
- c) Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 3 admet au moins trois complices.

2. Couples de complices associés à un entier donné

L'entier 100 admet plusieurs couples d'entiers complices qui lui sont associés. Ainsi, les couples $(9 ; 1111)$ et $(11 ; 909)$ sont des couples d'entiers complices associés au nombre 100.

- a) Démontrer que tout entier naturel n non nul admet au moins un couple de complices (a, b) associé, c'est-à-dire tel que $ab + 1 = n^2$.
- b) Déterminer tous les couples d'entiers complices associés au nombre 2011.