Exercice 3 académique : polygones entiers

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, d'unité 1 cm, on dit qu'un point est *entier* si ses coordonnées sont des nombres entiers ; on dit qu'un polygone est *entier* si ce polygone est convexe (c'est-à-dire « sans creux ») et si tous ses sommets sont des points entiers.
Pour un polygone entier *(P),* on note A l'aire en cm^2 de ce polygone, C le nombre de points entiers situés sur les côtés du polygone (sommets compris), et I le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur du polygone.
Le but de l'exercice est de déterminer une relation entre les nombres A, C et I.

1. Déterminer les nombres A, C et I dans les cas suivants :
   a) *(P)* est le rectangle de sommet les points (0 ; 0), (10 ; 0), (10 ; 7), (0 ; 7) ;
   b) (P) est le triangle de sommets les points (0 ; 0), (5 ; 2), (2 ; 4) ;
   c) (P) est le pentagone de sommets les points (2 ; 0), (7 ; 1), (5 ; 5), (2 ; 5), (1 ; 4).

2. Dans cette question, *(P)* est un rectangle entier dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, et dont les dimensions (en cm) sont notées n et p ($n \geq 1$ et $p \geq 1$).
   Exprimer les nombres A, C et I en fonction de n et p. En déduire une relation entre A, C et I indépendante de n et p.

3. Dans cette question, *(P)* est un triangle rectangle entier dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées.
   Démontrer que la relation entre A, C et I trouvée à la question 2. est encore valable pour ce triangle.

4. Montrer que si la formule précédente est valable pour deux polygones entiers ayant une frontière commune, elle est encore valable pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune, à condition que ce nouveau polygone soit lui aussi convexe.

5. En déduire que la relation trouvée à la question 2, demeure vraie pour tout polygone entier.