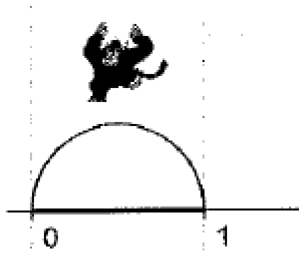
<u>Exercice 4 national : le singe sauteur</u>

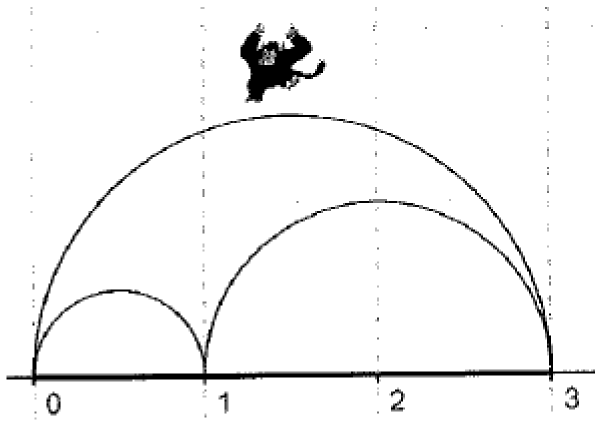
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.
Le nombre n est dit *atteignable* si le signe peut, en partant de l'origine (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en exactement n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1,2, ..., n (effectués dans cet ordre) et sans jamais sortir du segment $[0 ; n]$

Par exemple :

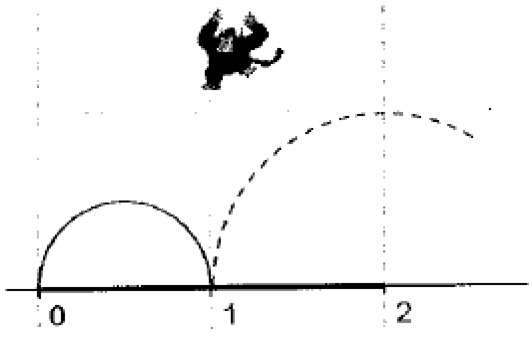
le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un 1 bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable, et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.
   On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*
3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+\ldots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5.
   a) Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4.
   b) En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   c) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose que $N \geq 6$ et que N est atteignable par une séquence qui commence par 1 + 2 + 3 ...
   Montrer que N+4 est aussi atteignable.