

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

## CLASSE DE PREMIÈRE

*Sujet réservé aux candidats des séries autres que la série S*

DURÉE : 4 heures.

*Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.*

### *Recommandations*

*Il est important d'argumenter les affirmations.*

*Même si la solution n'est pas complètement aboutie, le candidat est invité à décrire sa démarche ; un résultat, même partiel, sera valorisé.*

### **Exercice 1 national : essuie-glace**

**(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)**

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brise sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment  $[OB]$ . Soit  $A$  le point de  $[OB]$  tel que  $OA = 15$  cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment  $[AB]$  (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point  $O$  un angle de  $180^\circ$ . En donner une valeur arrondie au  $\text{cm}^2$ .

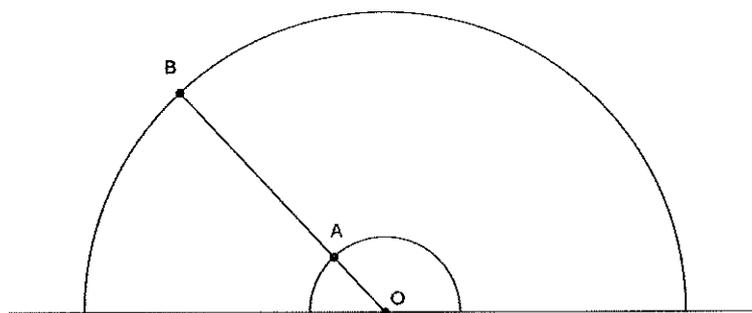


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un deuxième véhicule possède deux essuie-glace modélisés par deux segments  $[OB]$  et  $[O'B']$  de même longueur  $R$ , l'un tournant autour d'un point  $O$ , l'autre autour d'un point  $O'$ , tels que  $OO' = R$  (voir figure 2 ci-après). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite  $(OO')$ . Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

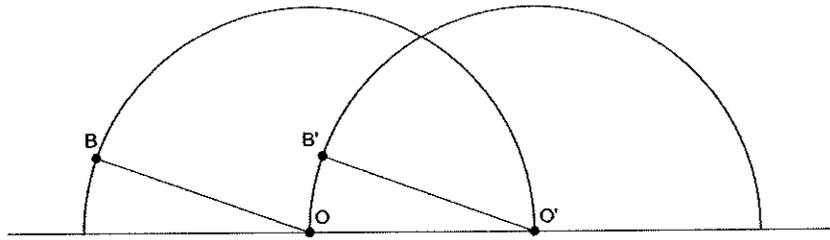


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment  $[AB]$ , qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment  $[OC]$  qui relie le centre de rotation  $O$  à un point  $C$  du segment  $[AB]$  tels que  $\widehat{OCA} = 30^\circ$ ,  $CB = 4 CA$  et  $OC = \sqrt{3} \times CA$ . On pose  $CA = a$ .



Fig. 3

- a) Démontrer que le triangle  $AOC$  est isocèle.
- b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point  $O$ . En début de course, le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  coïncident respectivement avec les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  du pare-brise tels que  $[MN]$  est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  coïncident respectivement avec les points  $M'$ ,  $N'$  et  $P'$  du pare-brise tels que le segment  $[OM']$  est horizontal. Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point  $O$  pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de  $a$  l'aire de la surface essuyée par le balai.

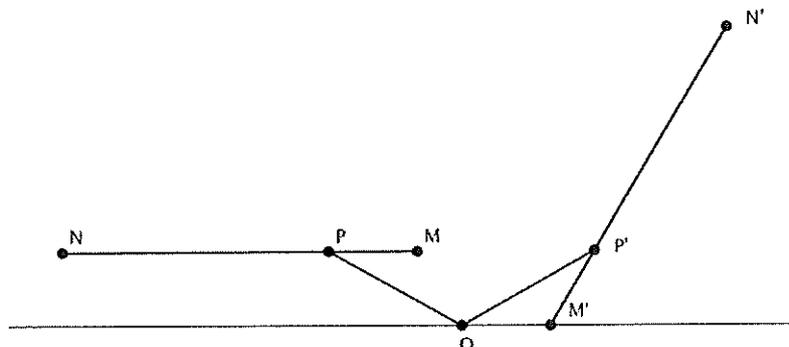


Fig. 4



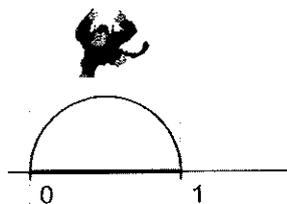
1. Les lignes  $(AX)$  et  $(JT)$  qui bordent l'une des allées sont-elles parallèles ?
2. Le bassin  $EFGH$  est-il carré ?
3. Les points  $K, E, M$  sont-ils alignés ?

### Exercice 4 national : le singe sauteur

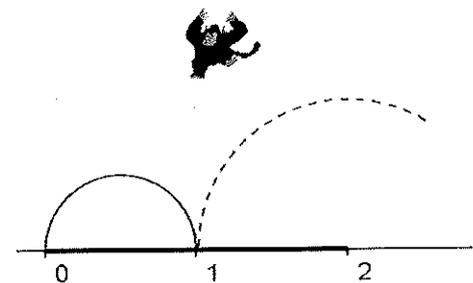
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre  $n$  est dit *atteignable* si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse  $n$  en **exactement**  $n$  bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, ...,  $n$  (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment  $[0 ; n]$ .

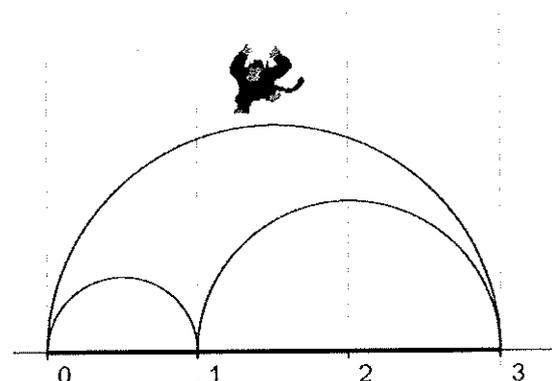
*Par exemple* : le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle  $[0 ; 2]$ .



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle  $[0 ; 3]$ ) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



## Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable, et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier  $m$ , on a :  $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ .

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5. a) Montrer que si le nombre entier  $n$  est atteignable alors le produit  $n(n-1)$  est divisible par 4.  
En déduire une condition sur l'entier  $n$  pour qu'il soit atteignable.  
b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose que  $N \geq 6$  et que  $N$  est atteignable par une séquence qui commence par  $1 + 2 + 3 \dots$   
Montrer que  $N+4$  est aussi atteignable.