OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

CLASSE DE PREMIÈRE-SUJET RÉSERVÉ AUX CANDIDATS DE LA SÉRIE S

DURÉE : 4 heures.

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Recommandations
Il est important d'argumenter les affirmations.
Même si la solution n'est pas complètement aboutie, le candidat est invité à décrire sa démarche ; un résultat, même partiel, sera valorisé.

Exercice 1 national : essuie-glace

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brise sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2.

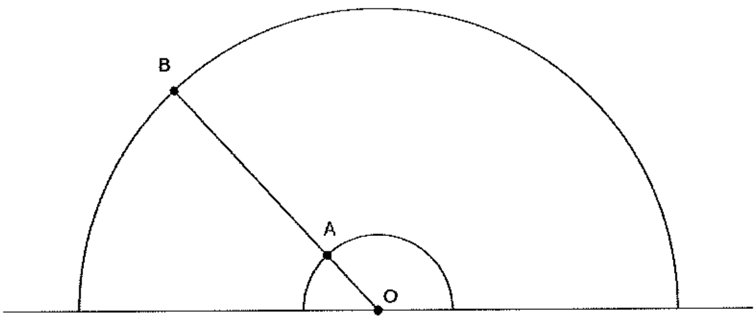


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un deuxième véhicule possède deux essuie-glace modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-après). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

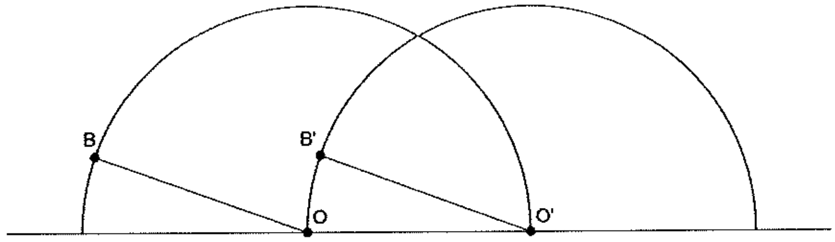


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4\ CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose $CA = a$.

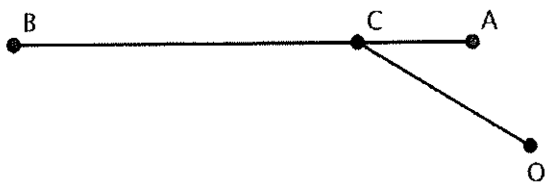


Fig. 3

a) Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course, le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course, A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.
Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

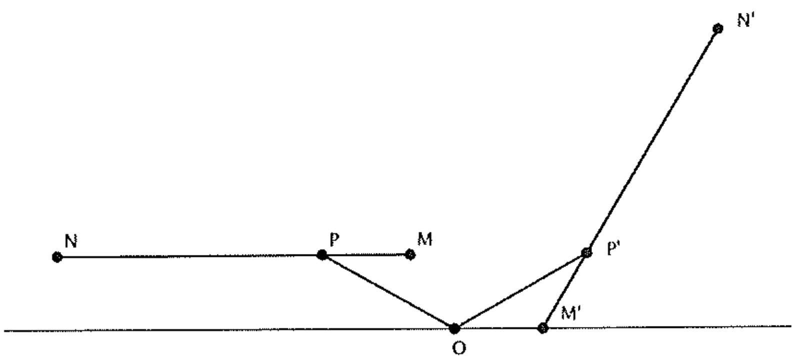


Fig. 4

Exercice 2 académique : nombres complices

On dit que deux entiers naturels a et b sont *complices* s'il existe un entier naturel n tel que $ab+1=n^2$. Dans ce cas, on dit que l'entier n est *associé* au couple de complices (a, b).

1. Complices d'un entier

a) Déterminer tous les couples d'entiers complices, compris au sens large entre 0 et 10.

b) L'entier 2011 admet 2009 comme complice. Citer deux autres complices de 2011.

c) Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 3 admet au moins trois complices.

2. Couples de complices associés à un entier donné

L'entier 100 admet plusieurs couples d'entiers complices qui lui sont associés. Ainsi, les couples (9,1111) et (11,909) sont des couples d'entiers complices associés au nombre 100.

a) Démontrer que tout entier naturel n non nul admet au moins un couple de complices (a, b) associé, c'est-à-dire tel que $ab+1=n^2$.

b) Déterminer tous les couples d'entiers complices associés au nombre 2011.

Exercice 3 académique : polygones entiers

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, d'unité 1 cm, on dit qu'un point est *entier* si ses coordonnées sont des nombres entiers ; on dit qu'un polygone est *entier* si ce polygone est convexe (c'est-à-dire « sans creux ») et si tous ses sommets sont des points entiers.
Pour un polygone entier (P), on note A l'aire en cm^2 de ce polygone, C le nombre de points entiers situés sur les côtés du polygone (sommets compris), et I le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur du polygone.
Le but de l'exercice est de déterminer une relation entre les nombres A, C et I.

1. Déterminer les nombres A, C et I dans les cas suivants :

a) (P) est le rectangle de sommet les points $(0;0)$, $(10;0)$, $(10;7)$, $(0;7)$;

b) (P) est le triangle de sommets les points $(0;0)$, $(5;2)$, $(2;4)$;

c) (P) est le pentagone de sommets les points $(2;0)$, $(7;1)$, $(5;5)$, $(2;5)$, $(1;4)$.

2. Dans cette question, (P) est un rectangle entier dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, et dont les dimensions (en cm) sont notées n et p ($n \geq 1$ et $p \geq 1$).
Exprimer les nombres A, C et I en fonction de n et p. En déduire une relation entre A, C et I indépendante de n et p.

3. Dans cette question, (P) est un triangle rectangle entier dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées.
Démontrer que la relation entre A, C et I trouvée à la question **2.** est encore valable pour ce triangle.

4. Montrer que si la formule précédente est valable pour deux polygones entiers ayant une frontière commune, elle est encore valable pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune, à condition que ce nouveau polygone soit lui aussi convexe.

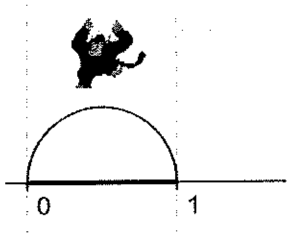
5. En déduire que la relation trouvée à la question **2.** demeure vraie pour tout polygone entier.

Exercice 4 national : le singe sauteur

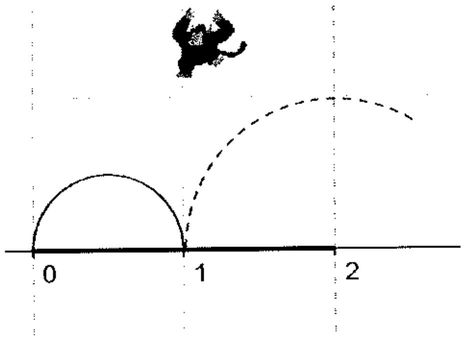
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs $1, 2, \ldots, n$ (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

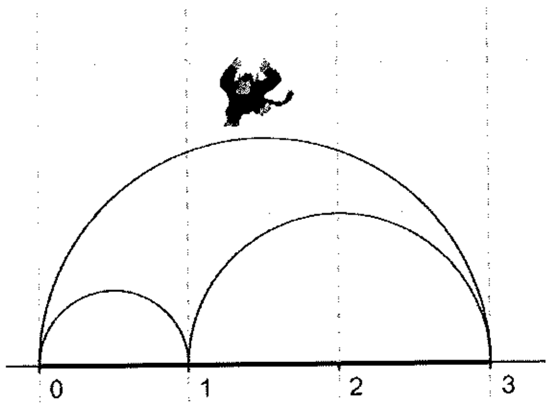
Par exemple : le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0 ; 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable, et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5. **a)** Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4.
   En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose que $\mathrm{N} \geq 6$ et que N est atteignable par une séquence qui commence par $1+2+3\ldots$
   Montrer que N+4 est aussi atteignable.