Stage inter-établissements
Collège Monge - Lycée Clos Maire
à Beaune

Mathématiques -
Recueil d'exercices
et de problèmes

2008 - 2009

Introduction

Ce recueil a été élaboré dans le cadre d'un stage inter-établissements, initié en décembre 2007, entre le collège Monge et le lycée Clos Maire à Beaune. Il est le fruit d'un travail commun entre les professeurs de mathématiques de ces deux établissements. Son but est de proposer une série d'exercices et de problèmes regroupés par thèmes, abordables aussi bien au collège qu'au lycée, mais avec des approches et des niveaux d'approfondissement différents. S'ils sont traités de façon régulière par les professeurs des deux cycles – ce qui est fortement conseillé – ils peuvent contribuer à tisser une culture mathématique commune chez les élèves qui poursuivent leur scolarité dans ces deux établissements et, de ce fait, à introduire davantage de continuité et de cohérence dans les apprentissages.

Les thèmes proposés sont conçus pour être posés au collège Monge ou au lycée Clos Maire. Les professeurs ont toute liberté pour aborder les notions qui les intéressent ou qui correspondent au niveau et à l'hétérogénéité de leurs classes. Ils ont également toute latitude pour conduire autour de ces thèmes des activités en classe entière, en module (en Seconde), ou constituer des sujets de devoirs à la maison. Ces sujets peuvent concerner des groupes restreints d'élèves ou une classe entière. Chaque énoncé est rédigé à l'aide d'un questionnement, mais les professeurs ont toute liberté pour s'en emparer à leur guise : les problèmes peuvent être utilisés tels quels, modifiés ou raccourcis au gré de chacun, en fonction des classes. Il ne faut pas hésiter non plus à proposer certains des sujets en classe de Cinquième ou de Quatrième, quitte à adapter quelques questions ; ils s'inscrivent tous dans les programmes du premier ou du second cycle. Une approche informatique peut également être envisagée pour certains d'entre eux.

Un premier thème intitulé MOYENNES a été abordé en 2007-2008 ; il est édité dans un précédent fascicule. Ce recueil aborde deux nouveaux thèmes intitulés respectivement CERCLES ET TANGENTES et AUTOUR DE L'AIRE D'UN TRIANGLE. Chacun des problèmes est précédé d'un commentaire indiquant, entre autres, le niveau auquel il peut être abordé. L'ensemble de la production appartient désormais aux professeurs des deux établissements, il participe d'une mémoire commune.

Comme le précédent, ce recueil doit beaucoup à Monsieur Dominique LANTERNIER, Proviseur du lycée Clos Maire, et à Monsieur Rémy RAVAUT, Principal du collège Monge, qui sont à l'initiative de l'opération de liaison entre les deux établissements. Il faut remercier tout particulièrement les professeurs du collège Monge et du lycée Clos Maire, qui ont poursuivi avec beaucoup de cœur le travail entrepris voici deux ans. Ils ont désormais plaisir à se retrouver pour travailler ensemble.

Robert FERACHOGLOU,
Chargé de mission sur poste d'IPR en Mathématiques.

Thème 2

Cercles et tangentes

A - Utilisation d'axes de symétrie

- Problème 1 - Avec un cercle et une corde
- Problème 2 - Avec un cercle et deux tangentes
- Problème 3 - Avec un cercle et trois tangentes (1)
- Problème 4 - Avec un cercle et trois tangentes (2)
- Problème 5 - Le triangle mystérieux
- Problème 6 - L'énigme de la couronne

B - Problèmes de construction et de lieu géométrique

- Problème 7 - Tangentes à un cercle menées d'un point extérieur
- Problème 8 - Tangentes communes à deux cercles tangents (1)
- Problème 9 - Tangentes communes à deux cercles tangents (2)
- Problème 10 - Cercles tangents à un cercle et une droite

PROBLÈME N° 1 : Avec un cercle et une corde

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit d'établir un résultat de base : la figure formée par un cercle et une corde admet un axe de symétrie. Ce résultat est à la base d'un grand nombre d'exercices de géométrie. Il peut être abordé en 6ème ou en 5ème.

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O. On considère A et B, deux points distincts du cercle ($\mathscr{C}$).

1. Que désigne le segment [AB] pour le cercle ($\mathscr{C}$) ?

2. Tracer la médiatrice (Δ) du segment [AB].
   Expliquer pourquoi le point O est situé sur la droite (Δ).

3. Considérons un point quelconque M de ($\mathscr{C}$). on note M' le symétrique de M par rapport à (Δ).
   Montrer que le point M' est situé sur le cercle ($\mathscr{C}$).

4. Déduire des questions précédentes que la droite (Δ) est un axe de symétrie du segment [AB] et du cercle ($\mathscr{C}$).

PROBLÈME N° 2 : Avec un cercle et deux tangentes

Objectif, niveau et difficultés – Comme pour le problème précédent, l'objectif est d'étudier une configuration clé : celle formée d'un cercle et de deux tangentes. On va établir que cette configuration admet un axe de symétrie, ce qui sera utilisé et exploité dans plusieurs autres problèmes (voir les problèmes 3, 4, 5 de ce thème). Deux méthodes sont proposées : le théorème de Pythagore, et les propriétés de conservation des symétries axiales parties 2 et 3). Tout cela est évidemment lié puisque le théorème de Pythagore est lui-même démontré à partir de certaines propriétés de conservation de ces symétries. Le niveau requis est celui de la 4ème ou de la 3ème.

Première partie : construction des tangentes

On considère un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
Soit I un point extérieur à ($\mathscr{C}$) . On considère le cercle (Γ) de diamètre [OI].
Le cercle (Γ) coupe le cercle ($\mathscr{C}$) en deux points A et B.

1. Quelle est la nature des triangles OAI et OBI ? Justifier la réponse.
2. Que représentent les droites (IA) et (IB) pour le cercle ($\mathscr{C}$) ?

Info : cette construction est due à Euclide.

Deuxième partie : avec le théorème de Pythagore

1. a) Ecrire la relation de Pythagore dans chacun des deux triangles AOI et BOI.
   b) En déduire que $IA = IB$.
2. Que représente la droite (OI) pour le segment [AB] ?
3. En déduire que la droite (OI) est un axe de symétrie de la figure.

Troisième partie : avec les propriétés de la symétrie axiale

1. Par la symétrie axiale d'axe (OI), quelle est l'image du cercle ($\mathscr{C}$) ? Quelle est l'image du cercle Γ par cette même symétrie ?
2. En déduire l'image de A par cette symétrie. Retrouver alors le résultat de la deuxième partie, question 2.

Quatrième partie : une propriété métrique

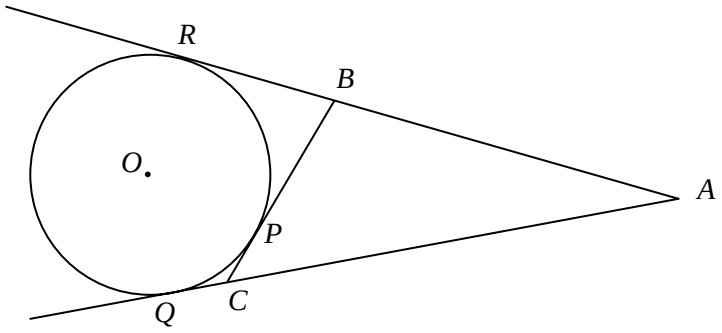
La droite (OI) coupe le cercle ($\mathscr{C}$) en M et N, avec $IM < IN$.

1. Placer les points M et N sur la figure.
2. Justifier les égalités : $IM = IO - OA$ et $IN = IO + OA$.
3. En déduire que $IM \times IN = IA^2$.
4. Application : si ($\mathscr{C}$) est un cercle de rayon 2 cm, et si $OI = 5$ cm, calculer la valeur exacte de IA.

PROBLÈME 3 : Avec un cercle et trois tangentes (1)

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit ici d'utiliser le résultat relatif à un cercle et deux tangentes, et ce à plusieurs reprises. On obtient une propriété métrique intéressante. Le niveau conseillé est celui de la 5ème ou de la 4ème. La partie A est expérimentale ; il est conseillé d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Dans ce problème, on considère la figure suivante, dans laquelle les droites (*AB*), (*BC*) et (*CA*) sont tangentes au cercle ($\mathscr{C}$), de centre *O*. On note *P*, *Q*, *R* les points de contacts respectifs de ces droites avec le cercle.



Partie A – Construction et expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie

1. Construction de la figure

   Créer un point libre *O* et créer le cercle $\mathscr{C}$ de centre *O* et de rayon 3 cm.
   Créer un point libre *A* et tracer le cercle $\mathscr{C}$' de diamètre [*OA*].
   Ce cercle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points *R* et *Q*.
   Créer les segments [*AR*], [*AQ*], [*OR*] et [*OQ*].
   Que peut-on dire des droites (*AR*) et (*AQ*) ? …….
   ……. .

   Créer un point libre *P* sur le cercle $\mathscr{C}$ et placer *P* sur l'arc de cercle intérieur au triangle *ARQ*.
   Créer la droite ($\mathscr{D}$) passant par *P* et perpendiculaire à (*OP*).
   Que peut-on dire de cette droite ?.....

   Créer les points *B* et *C* intersection de la droite ($\mathscr{D}$) et des droites (*AR*) et (*AQ*).
   Créer le segment [*BC*] puis effacer la droite ($\mathscr{D}$) et le cercle $\mathscr{C}$'.

2. Affichage des longueurs

   Afficher les longueurs des segments [*BR*] et [*BP*], puis [*CQ*] et [*CP*] et enfin [*AR*] et [*AQ*].

On note p le périmètre du triangle ABC.
Créer p puis afficher p.

3. <u>Conjecture</u>
   Déplacer le point P entre R et Q.
   Observer en même temps les longueurs des segments affichées dans la question 2.
   Quelles conjectures peut-on émettre sur les longueurs des segments ? sur le périmètre p ?
   On peut faire varier les points O et A pour conforter la solidité de cette conjecture.

Partie B – Résolution mathématique

Dans cette partie, on va démontrer les conjectures émises en A-3.

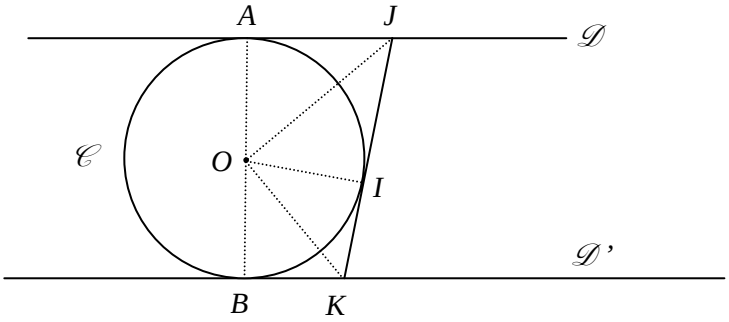
1. Démontrer les égalités $AR = AQ$, puis $BP = BR$ et enfin $CQ = CP$. (On pourra utiliser le fait que la figure formée par un cercle et deux tangentes admet un axe de symétrie.)

2. On suppose que $AR = 6$. En déduire la valeur du périmètre p du triangle ABC.

PROBLÈME N° 4 : Avec un cercle et trois tangentes (2)

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème met à nouveau en scène trois tangentes à un même cercle, dans le cas où deux d'entre elles sont parallèles. Il est également initié par une expérimentation utilisant les TICE. Il peut être posé en 4ème, 3ème ou 2nde.

On considère la figure suivante, dans laquelle [*AB*] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$, de centre *O*, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$' sont les tangentes au cercle $\mathscr{C}$ respectivement en *A* et *B*, *J* est un point variable sur $\mathscr{D}$, la tangente au cercle menée de *J* coupe $\mathscr{D}$' en *K*. On note enfin *I* le point de contact entre la droite (*IJ*) et le cercle ($\mathscr{C}$).



A – Expérimentation et conjecture

Réaliser la figure sur un logiciel de géométrie dynamique.

Faire afficher la mesure en degré de l'angle $\widehat{JOK}$.

Déplacer le point *J* sur la droite $\mathscr{D}$.

Que peut-on conjecturer sur le triangle *JOK* ?

B – Résolution mathématique

On pourra utiliser le résultat suivant : « La figure formé par un cercle et deux de ses tangentes issues d'un même point admet un axe de symétrie ».

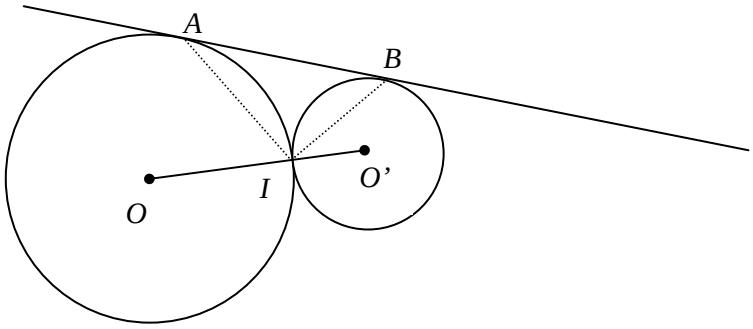
1. Comparer les angles $\widehat{BOK}$ et $\widehat{KOI}$, puis les angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{JOA}$.

2. Démontrer alors le résultat conjecturé dans la partie A.

PROBLÈME N° 5 : Le triangle mystérieux

Objectif, niveau et difficultés – Dans la configuration formée par une droite tangente à deux cercles tangents, le triangle formé par les trois points de contact a une propriété particulière, qui est à l'étude dans ce problème. Deux méthodes différentes sont proposées, utilisant des outils élémentaires. Il peut être abordé en 4ème, 3ème ou 2nde.

Dans la figure suivante, les deux cercles, de centres *O* et *O'*, sont tangents extérieurement en *I*, la droite (*AB*) est tangente aux deux cercles respectivement en *A* et *B*.
Le but de ce problème est d'étudier le triangle *IAB* par deux méthodes différentes.



A – Première méthode : avec les axes de symétrie

1. Tracer la tangente commune au deux cercles en *I*. Cette droite coupe la droite (*AB*) en *J*.
   Comparer les longueurs *JA*, *JI* et *JB*.
   (On pourra utiliser le résultat suivant : « La figure formé par un cercle et deux de ses tangentes issues d'un même point admet un axe de symétrie ».)

2. Conclure sur la nature du triangle *AIB*.

B – Deuxième méthode : avec les angles

On note $a = \widehat{IOA}$.

1. Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{IO'B}$ en fonction de *a*.

2. Pourquoi peut-on affirmer que les triangles *OAI* et *O'BI* sont isocèles ? En déduire une expression des angles à la base de chacun de ces deux triangles en fonction de *a*.

3. Exprimer enfin $\widehat{AIB}$ en fonction de *a*, et conclure sur la nature du triangle *AIB*.

PROBLÈME N° 6 : L'énigme de la couronne

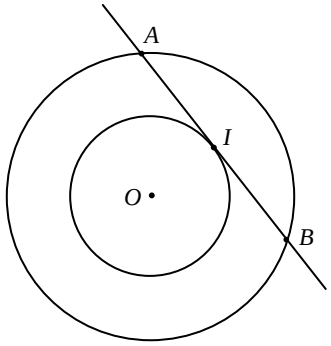
Objectif, niveau et difficultés – En forme d'énigme, ce problème est un réinvestissement du résultat démontré dans le problème 1 : « la figure formé par un cercle et une corde admet un axe de symétrie ». Il peut être abordé en 4ème ou en 3ème.

Enigme

Sur la figure ci-contre, les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont le même centre O. La droite (AB) est tangente en I au cercle $\mathscr{C}_1$.

On donne $AB = 4$ cm.

Calculer l'aire de la couronne.



Indications

On note r_1 et r_2 les rayons des cercles, avec $r_1 < r_2$.

1. Exprimer l'aire de la couronne en fonction de r_1 et r_2.
2. Montrer que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[AB]$. En déduire la longueur AI.
3. Calculer $r_2^2 - r_1^2$. En déduire l'aire de la couronne.

PROBLÈME N° 7 : Tangentes à un cercle menées d'un point extérieur

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de mettre en ouvre la propriété du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle pour construire à la règle et au compas les tangentes à un cercle menées d'un point extérieur. C'est une construction de base que l'on trouve chez Euclide, et qui doit impérativement être enseignée en classe de 4ème. Elle a déjà été présentée dans le problème 2.

Information

Dans les *Données*, qui est un livre complémentaire au monumental ouvrage que sont *Les Eléments*, EUCLIDE pose le problème suivant : « Etant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et un point I extérieur au cercle, construire à la règle non graduée et au compas les tangentes au cercle $\mathscr{C}$ issues de I.

On considère un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.
Soit I un point extérieur à ($\mathscr{C}$) . On considère le cercle (Γ) de diamètre [OI].
Le cercle (Γ) coupe le cercle ($\mathscr{C}$) en deux points A et B.

1. Quelle est la nature des triangles OAI et OBI ? Justifier la réponse.

2. Que représentent les droites (IA) et (IB) pour le cercle ($\mathscr{C}$) ?

3. A-t-on répondu à la question d'Euclide ?

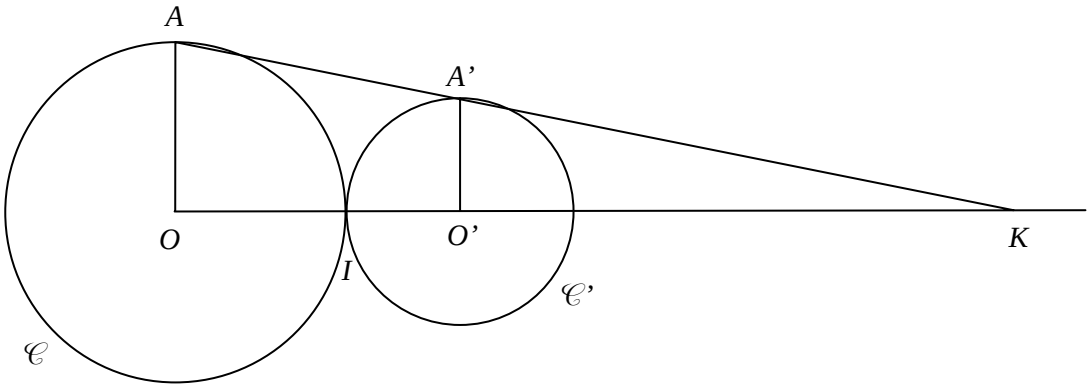
4. Recherche documentaire : à partir de livres ou de sites Internet, rédiger un texte de quelques lignes sur Euclide (époque, lieu, travaux réalisés, importance, …).

PROBLÈME N° 8 : Tangentes communes à deux cercles tangents (1)

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de décrire et de justifier un procédé de construction d'une tangente non triviale à deux cercles tangents. Le procédé décrit s'adapte à deux cercles non tangents, pourvu qu'ils ne soient pas contenus l'un dans l'autre. Il est cependant élémentaire, et n'utilise que les outils du collège. Il peut être abordé dès la 4ème, mais semble mieux adapté à la 3ème ou à la 2nde.

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O', et qui ne sont pas de même rayon. On suppose que ces deux cercles sont tangents extérieurement en I. Le but de ce problème est de construire une tangente commune à ces deux cercles, qui ne passe pas par le point I.

1. Sur la figure suivante, on a placé deux points I et A' sur chacun des deux cercles, de telle sorte que les droites (OA) et (OA') soient toutes les deux perpendiculaires à la droite (OO'). La droite (AA') coupe alors la droite (OO') en un point K. (Nous admettons que ces deux droites sont sécantes.)



   Réaliser la figure, en prenant 5 cm et 2 cm comme rayons respectifs des cercles.

2. Démontrer que le rapport des longueurs $\frac{KO'}{KO}$ est égal à $\frac{2}{5}$.

3. Construire B' l'un des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ avec le cercle de diamètre [$O'K$].
   Que représente la droite (KB') pour le cercle $\mathscr{C}'$? Justifier la réponse.

4. La parallèle à la droite ($O'B'$) passant par le point O coupe la droite (KB') en un point B.
   1. Démontrer que le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   2. En déduire que la droite (KB') est également tangente au cercle $\mathscr{C}$ en B.

5. Rédiger une conclusion.

PROBLÈME N° 9 : Tangentes communes à deux cercles tangents (2)

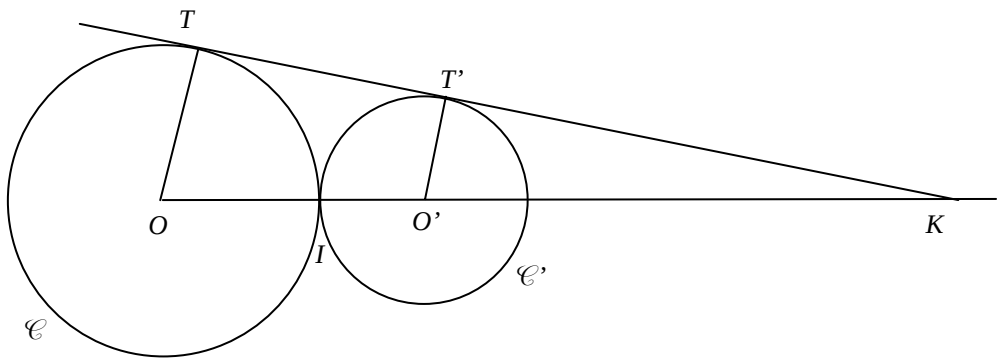
Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de décrire et de justifier un procédé de construction d'une tangente non triviale à deux cercles tangents. Le procédé décrit s'adapte à deux cercles non tangents, pourvu qu'ils ne soient pas contenus l'un dans l'autre. Le problème est analogue au précédent, mais la construction n'est pas donnée au départ. Sa détermination va résulter d'une méthode d'analyse et synthèse. Il est mieux adapté à la 2nde ou à la 1ère S. En série S, il donne également un procédé de construction d'un centre d'homothétie amenant un cercle sur l'autre.

Problème

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et r', avec $r' < r$. On suppose que ces deux cercles sont tangents extérieurement en I. Le but de ce problème est de construire une tangente commune à ces deux cercles, qui ne passe pas par le point I.

A. Analyse du problème

On suppose que la figure est réalisée, et on va en étudier des propriétés.



On note T et T' les points de contact d'une tangente avec chacun des deux cercles.
La droite (TT') coupe la droite (OO') en K. (On admet que ces deux droites sont sécantes.)

1. Démontrer que les points O, I, O' sont alignés.

2. Prouver que les droites (OT) et ($O'T'$) sont parallèles.

3. Démontrer l'égalité : $\dfrac{KO'}{KO} = \dfrac{r'}{r}$.

4. En déduire l'égalité : $KO = \dfrac{r}{r - r'} \times OO'$.

B. <u>Réalisation de la construction</u>

Il s'agit à présent de réaliser une figure correcte.

1. Tracer deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' deux cercles de centres respectifs *O* et *O'*, de rayons respectifs $r = 3\,\text{cm}$ et $r' = 2\,\text{cm}$, tangents extérieurement en *I*.

   Construire le point *K* de la demi droite [*OO'*) tel que $KO = \dfrac{r}{r - r'} \times OO'$.

2. Construire le cercle de diamètre [*KO'*] ; ce cercle coupe le cercle $\mathscr{C}$' en deux points *T'* et *U'*.

3. Expliquer pourquoi la droite (*KT'*) est tangente au cercle $\mathscr{C}$' en *T'*.

4. La parallèle à (*O'T'*) passant par *O* coupe la droite (*KT'*) en *T*. Montrer que le point *T* appartient au cercle $\mathscr{C}$ et que la droite (*KT'*) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en *T*.

5. Rédiger une conclusion.

PROBLÈME N° 10 : Cercles tangents à un cercle et une droite

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème est constitué de deux parties. Dans un premier temps, il s'agit de construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée qui ne coupe pas ce cercle. Il y a une double infinité de solutions, selon que le cercle construit est tangent extérieurement (partie I) ou intérieurement (partie III) au premier cercle. L'objectif est ensuite de voir s'il y a un ordre particulier dans tous ces cercles ainsi construits, plus précisément en déterminant le lieu géométrique de leurs centres (on trouve deux paraboles). Le problème est riche, il doit comporter une partie expérimentale avec un logiciel de géométrie dynamique (partie II, question 1). Il peut être abordé en 1ère S ou Terminale S.

On se donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r, et une droite $\mathscr{D}$ ne coupant pas le cercle $\mathscr{C}$.

Dans la **Partie I** de ce problème, on construit un cercle Γ vérifiant la condition :

($\mathscr{P}$) : « Γ est tangent à la fois à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, le cercle $\mathscr{C}$ étant à l'extérieur de Γ ».

Dans la P**artie II**, on étudie le lieu géométrique des centres Ω de tous les cercles Γ vérifiant cette condition.

Dans la **Partie III**, on généralise le problème en étudiant le cas où $\mathscr{C}$ est intérieur à Γ.

Partie I

On considère un point M de $\mathscr{D}$, et on s'intéresse au cercle Γ vérifiant la condition ($\mathscr{P}$), et tangent à la droite $\mathscr{D}$ en M.

1. Justifier que le centre Ω de Γ se trouve sur la droite Δ, perpendiculaire à $\mathscr{D}$ en M.

2. On note H le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et du segment $[\Omega A]$.
   a) Justifier que le point Ω est équidistant des points M et H.
   b) En déduire une relation entre les distances ΩM et ΩA.
   c) Conclure en en indiquant une construction du point Ω et du cercle Γ (on pourra utiliser une droite $\mathscr{D}$', parallèle à $\mathscr{D}$ et telle que la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}$' égale r).

Partie II

Dans cette partie, on munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

On considère que la droite $\mathscr{D}$ est l'axe (Ox), et que le point A, centre du cercle $\mathscr{C}$, a pour coordonnées $\left(0\,;a\right)$ (a réel strictement supérieur à r).

1. a) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure étudiée en Partie I.

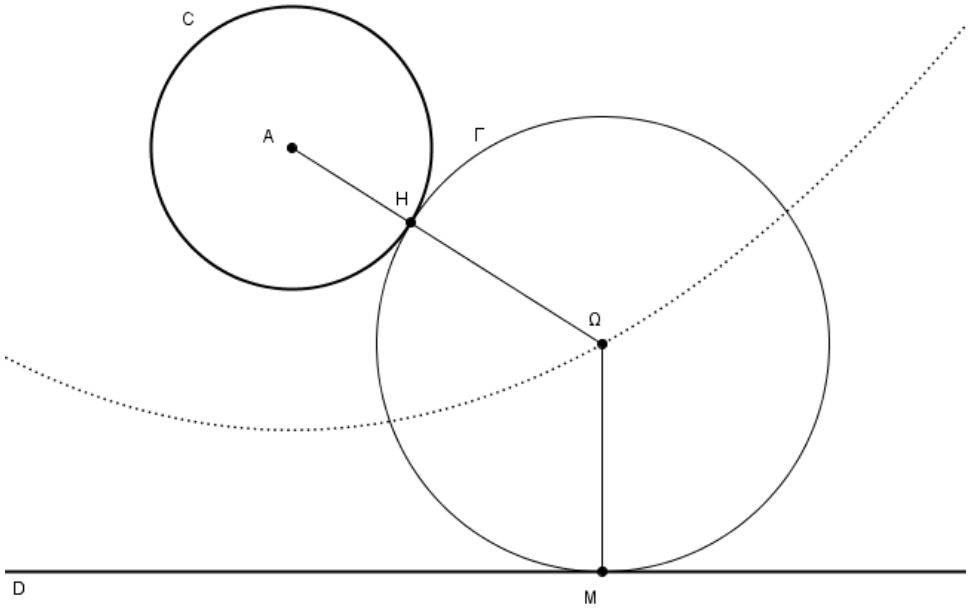
b) Conjecturer le lieu géométrique du centre Ω de Γ lorsque le point M décrit la droite $\mathscr{D}$.

2. Démontrer cette conjecture en exprimant les coordonnées du point Ω en fonction de l'abscisse x du point M.

***Variante pour la question* 2.**

2. Démontrer cette conjecture en vérifiant que, lorsque M décrit $\mathscr{D}$, le point Ω décrit la courbe représentative de la fonction f définie sur 3 par $f(x)=\dfrac{x^2}{2(a+r)}+\dfrac{a-r}{2}$.

<u>Note</u> : on obtient une figure analogue à la figure ci-dessous.



<u>Partie III</u>

Reprendre la **Partie II** en considérant désormais la condition :

($\mathscr{P}$') : « Γ est tangent à la fois à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{D}$, le cercle $\mathscr{C}$ étant à l'intérieur de Γ ».

Thème 3

Autour de l'aire d'un triangle

A - Comparaison d'aires

- Problème 1 - Etude de quelques figures clés
- Problème 2 - Partage d'un quadrilatère
- Problème 3 - Découpage d'un triangle (1)
- Problème 4 - Découpage d'un triangle (2) et propriété caractéristique de la médiane
- Problème 5 - Le théorème du pied de la bissectrice
- Problème 6 - Prolongements d'un triangle

B - Les aires : un outil pour la géométrie

- Problème 7 - Une propriété du triangle équilatéral
- Problème 8 - Triangles ayant deux hauteurs de même longueur
- Problème 9 - Triangle : aire, périmètre et rayon du cercle inscrit
- Problème 10 - Démonstration du concours des médianes d'un triangle
- Problème 11 - Un alignement dans le trapèze
- Problème 12 - Une condition analytique d'alignement

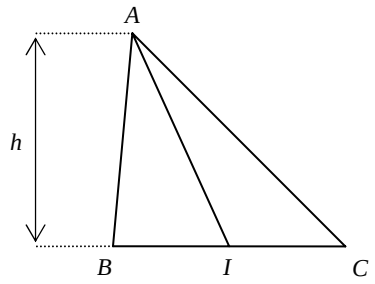
Autour de l'aire d'un triangle
A - Comparaison d'aires

PROBLÈME N° 1 : Etude de quelques figures clés

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de quatre exercices pratiquement indépendants. Le premier est un véritable résultat de base, il est indispensable de le traiter en classe de 5ème. Le deuxième peut également être abordé à ce niveau, en admettant le résultat du premier. Le troisième exercice n'utilise que la forme donnant l'aire d'un triangle ; il est dû à Euclide, qui l'utilise abondamment dans d'autres démonstrations. Il peut également être présenté dès la 5ème. Le quatrième exercice, plus complexe, doit attendre la propriété de concours des médianes pour être abordé. Il est plutôt conseillé en classe de 4ème.

A - Aire et médiane d'un triangle

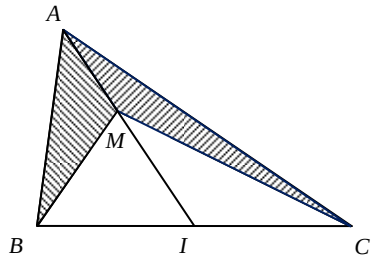
Sur la figure ci-contre, *ABC* est un triangle, *I* est le milieu du côté [*BC*].
On note *h* la hauteur du triangle, relative à la base [*BC*].



1. Montrer que l'aire du triangle *ABI* est égale à $\frac{BI \times h}{2}$.
2. En déduire que les triangles *ABI* et *AIC* ont la même aire.
3. Compléter la phrase : « Dans un triangle, une médiane partage ce triangle en ……. ».

B – Le fer de lance

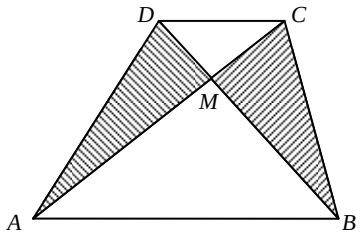
Sur la figure ci-contre, *ABC* est un triangle, *I* est le milieu du côté [*BC*], *M* est un point quelconque du segment médian [*AI*].



1. Comparer les aires des triangles *ABI* et *ACI*.
2. Comparer les aires des triangles *MBI* et *MCI*.
3. Conclure relativement aux aires des deux triangles hachurés.

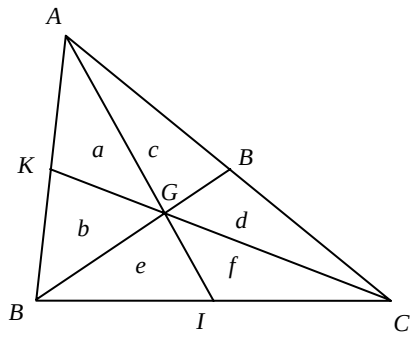
C – Le nœud pap'

Sur la figure ci-contre, *ABCD* est un trapèze de bases [*AB*] et [*CD*]. Ses diagonales se coupent en un point *M*.



1. Comparer les aires des triangles *ABD* et *ABC*.
2. Exprimer l'aire du triangle *ABD* comme somme des aires de deux autres triangles. Procéder de même avec l'aire du triangle *ACD*.
3. Comparer alors les aires des deux triangles hachurés.

D – L'ULM



Dans un triangle *ABC*, *I*, *J*, *K*, sont les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*CA*] et [*AB*]. *G* est le centre de gravité.
On note, comme sur la figure, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* les aires des six petits triangles délimités par les trois médianes. Le but de cet exercice est de montrer que ces six aires sont égales.

1ère méthode

a) En utilisant la partie A, comparer *a* et *b*, puis *c* et *d*, et enfin *e* et *f*.
b) Démontrer que les droites (*KB*) et (*BC*) sont parallèles. En déduire, en utilisant la partie C, que $b = d$.
c) Montrer, de même, que $a = f$.
d) Conclure.

2ème méthode

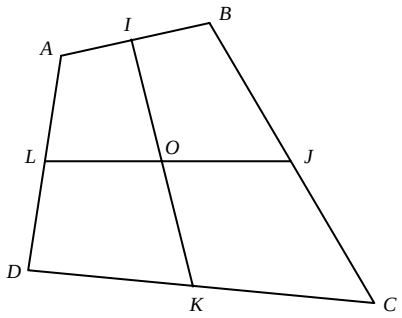
a) En utilisant la partie A, comparer *a* et *b*, puis *c* et *d*, et enfin *e* et *f*.
b) En utilisant la partie B, comparer $a + b$ et $c + d$. En déduire que $a = b = c = d$.
c) Conclure.

PROBLÈME N° 2 : Partage d'un quadrilatère

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème envisage plusieurs propriétés d'un quadrilatère quelconque, avec les milieux des côtés. Deux d'entre elles concernent les aires, l'autre est le théorème de Varignon, qui est bien connu. Le niveau conseillé est celui de la classe de 4ème.

Rappel : dans un triangle, chaque médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

On considère la figure ci-contre, où *ABCD* est un quadrilatère quelconque, *I*, *J*, *K*, *L* sont les milieux respectifs des segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*]. Les « segments médians » [*IK*] et [*JL*] se coupent en *O*.



1. Une première égalité d'aires
   a) Comparer les aires des triangles *OAI* et *OIB*, puis *OBJ* et *OJC*, puis *OCK* et *OKD*, et enfin *ODL* et *OLA*.
   b) En déduire l'égalité :

$$\boxed{\text{aire } (OIAL) + \text{aire } (OJCK) = \text{aire } (OIBJ) + \text{aire } (OKDL)}.$$

2. Le théorème de Varignon
   a) Démontrer que les droites (*IL*) et (*BD*) sont parallèles et que $IL = \frac{1}{2} \times BD$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère *IJKL* ? Justfier la réponse. (Ce résultat est appelé « théorème de Varignon ».)
   c) En déduire que *O* est le milieu de chacun des segments [*IK*] et [*JL*].
   d) Montrer que les quatre triangles *OIJ*, *OJK*, *OKL*, *OLI* ont la même aire.

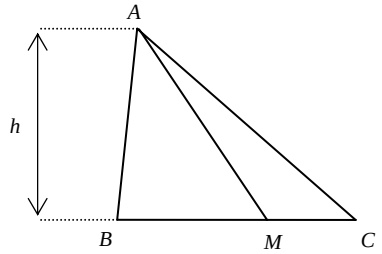
3. Une deuxième égalité d'aires
   En utilisant les questions 1 et 2, démontrer l'égalité :

$$\boxed{\text{aire } (AIL) + \text{aire } (CJK) = \text{aire } (BIJ) + \text{aire } (DKL)}$$

PROBLÈME N° 3 : Découpage d'un triangle (1)

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit d'établir une propriété classique du triangle en termes d'aire. Cette propriété est hélas méconnue en général des élèves du lycée ; elle est pourtant extrêmement simple, sa preuve n'utilise que les outils de la 5ème. Cependant, la démonstration comporte une partie de calcul littéral qui fait que ce problème est plutôt recommandé en 4ème ou en 3ème.

Sur la figure ci-contre, *ABC* est un triangle, *M* est un point du côté [*BC*].
On note *h* la hauteur issue de *A*.



1. Question préliminaire

   Montrer que l'aire du triangle *AMB* est égale à $\frac{MB \times h}{2}$, et que l'aire du triangle *AMC* est égale à $\frac{MC \times h}{2}$.

2. Deux cas particuliers

   a) On suppose que *M* est le milieu de [*BC*].
   Montrer que les triangles *AMB* et *AMC* ont la même aire.

   b) On suppose que $MB = 2 \times MC$.
   Montrer que l'aire du triangle *AMB* est le double de celle du triangle *AMC*.

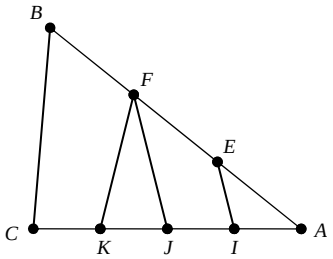
3. Cas général : *M* est un point quelconque du segment [*BC*], distinct de *B* et *C*

   Démontrer l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire }(AMB)}{\text{aire }(AMC)} = \frac{MB}{MC}}$.

4. Application

   Sur la figure ci-contre, le segment [*AB*] a été découpé en trois parties égales, le segment [*AC*] en quatre parties égales.

   Si l'aire du triangle *AEI* est égale à 1, que vaut l'aire du triangle *ABC* ? du triangle *AFK* ? du triangle *FKJ* ?



PROBLÈME N° 4 : Découpage d'un triangle (2) et propriété caractéristique de la médiane

Objectif, niveau et difficultés – Le but de ce problème est de caractériser la médiane d'un triangle en termes d'aire. Il n'utilise que des outils du collège (aire d'un triangle et calcul fractionnaire). Il est cependant difficile, notamment parce qu'il utilise le calcul littéral, et fait intervenir certains quotients. Il peut être abordé en 3ème (en devoir à la maison) pour les bons élèves, ou en 2nde.

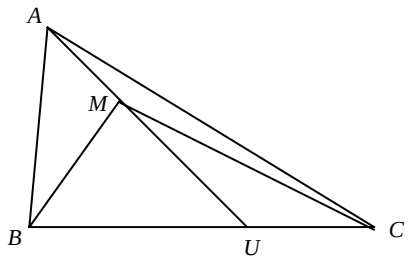
Question préliminaire

On considère deux fractions égales $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{d}$, avec $b \neq d$.

1. Cas particulier avec $\frac{14}{21}$ et $\frac{2}{3}$. Vérifier que l'on a : $\frac{14}{21} = \frac{2}{3} = \frac{14-2}{21-3}$.
2. Cas général : on pose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

   Vérifier l'égalité $(a-c) = k(b-d)$. En déduire que $\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

Problème



On considère la figure ci-contre, où *M* est un point intérieur au triangle *ABC*. La droite (*AM*) coupe le segment [*BC*] en *U*.

1. a) On note *h* la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*.
   Exprimer l'aire du triangle *ABU* et du triangle *ACU* en fonction de *h* et des longueurs *BU* et *CU*.

   b) En déduire une expression du quotient $\frac{\text{aire}(ABU)}{\text{aire}(ACU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

2. Procéder de même pour obtenir une expression du quotient $\frac{\text{aire}(MBU)}{\text{aire}(MCU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

3. Démontrer à l'aide de la question préliminaire l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)} = \frac{UB}{UC}}$.

4. <u>Propriété caractéristique de la médiane</u>

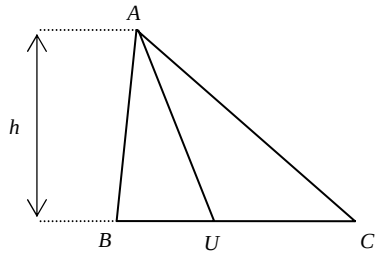
a) On suppose dans cette question que M appartient à la médiane issue de A.
Quelle est alors la position du point U sur le segment $[BC]$?
En déduire que : $\boxed{\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)}$.

b) <u>Réciproque</u>
On suppose dans cette question que : $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$.
Démontrer que M appartient à la médiane issue de A.

PROBLÈME N° 5 : Le théorème du pied de la bissectrice

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème assez technique est envisageable en 3ème, il est plutôt recommandé en classe de 2nde. Les outils utilisés sont pourtant modestes : ils se limitent à la formule donnant l'aire d'un triangle et à quelques éléments de calcul littéral. Le résultat est un classique de la géométrie, qui offre de nombreuses applications. L'une d'entre elles est proposée dans la question 4.

Sur la figure ci-contre, *ABC* est un triangle, la droite (*AU*) est la bissectrice issue de *A* dans le triangle.
On note *h* la hauteur du triangle, relative à la base [*BC*].



1. Une première égalité
   On note *h* la hauteur du triangle issue du sommet *A*.
   a) Montrer que l'aire du triangle *AUB* est égale à $\frac{UB \times h}{2}$, et que l'aire du triangle *AUC* est égale à $\frac{UC \times h}{2}$.
   b) Démontrer l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire }(AUB)}{\text{aire }(AUC)} = \frac{UB}{UC}}$.

2. Une deuxième égalité
   a) Justifier le fait que le point *U* est situé à la même distance des droites (*AB*) et (*AC*). On note *d* cette distance commune.
   b) Montrer que l'aire du triangle *AUB* est égale à $\frac{AB \times d}{2}$, et que l'aire du triangle *AUC* est égale à $\frac{AC \times d}{2}$.
   c) Démontrer l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire }(AUB)}{\text{aire }(AUC)} = \frac{AB}{AC}}$.

3. Déduire des questions précédentes que : $\boxed{\frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC}}$.

4. Application : *ABC* est un triangle rectangle et isocèle en *B* tel que $BC = 1$. La bissectrice issue de *A* coupe le côté [*BC*] en *U*. Démontrer que $BU = \sqrt{2} - 1$.

PROBLÈME N° 6 : Prolongements d'un triangle

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème dont le résultat est surprenant, n'utilise que le rappel comme outil. Il peut être abordé en 5ème (en devoir à la maison, ou sous la forme d'une énigme). Bien entendu, il ne déparerait pas en 4ème ou en 3ème.

Rappel : dans un triangle, chaque médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

Problème

ABC est un triangle, *I*, *J* et *K* sont les symétriques respectifs de *B* par rapport à *C*, de *C* par rapport à *A* et de *A* par rapport à *B*.

Le but de ce problème est d'établir que : aire (*IJK*) = 7 × aire (*ABC*).

Questions

1. Réaliser une figure.

2. Comparer les aires des triangles *ABC* et *ACI*, puis celles des triangles *ABC* et *ABJ*.

3. Comparer les aires des triangles *ABC* et *BCK*.

4. De même, comparer les aires restantes, puis conclure.

PROBLÈME N° 7 : Une propriété du triangle équilatéral

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème dont le résultat est surprenant, n'utilise que le rappel comme outil. Il peut être abordé en 5ème (en devoir à la maison, ou sous la forme d'une énigme). Bien entendu, il ne déparerait pas en 4ème ou en 3ème.

Lire le problème ci-dessous, puis répondre aux questions.

Problème

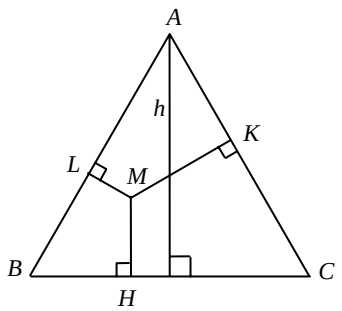
Un agriculteur possède un champ ayant la forme d'un triangle équilatéral. Il désire creuser un puits à l'intérieur de celui-ci pour irriguer, à l'aide de tuyaux, les bords de son terrain. Il veut utiliser le minimum de tuyaux.

Doit-il privilégier un emplacement plutôt qu'un autre pour creuser son puits ? Si oui, lequel ?

Questions

Pour répondre à ces questions, on considère un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur à ce triangle. On note H, K et L les pieds des hauteurs issues de M respectivement des triangles BCM, ACM et ABM.

On désigne par h la hauteur du triangle ABC.



1. Faire une figure.

2. En exprimant de deux façons l'aire du triangle ABC, montrer que : $MH + MK + ML = h$.

3. Aidez cet agriculteur à faire son choix…

PROBLÈME N° 8 : Triangles ayant deux hauteurs de même longueur

Objectif, niveau et difficultés – On connaît déjà plusieurs caractérisations d'un triangle isocèle : par les longueurs des côtés, par les mesures des angles, par la confusion de deux droites remarquables, ….. Ce problème en établit une autre : par l'égalité des longueurs de deux des hauteurs. Il peut être posé en 5ème (avec de l'aide), en 4ème ou en 3ème.

Problème

Le but de ce problème est de déterminer la nature d'un triangle *ABC* ayant deux hauteurs [*BH*] et [*CK*] de même longueur.

1. Réalisation d'une figure
   a) Exécuter le programme de construction suivant :
   – tracer un segment [*BH*], puis la droite perpendiculaire en *H* à la droite (*BH*) ;
   – placer sur cette droite un point *C* distinct de *H* ;
   – tracer le cercle de centre *C* et de rayon *BH*, puis le cercle de diamètre [*BC*] ; nommer *K* l'intersection des deux cercles qui se trouve du même côté que *H* par rapport à la droite (*BC*) ;
   – nommer *A* le point d'intersection des droites (*CH*) et (*BK*).

   b) Prouver que sur la figure précédente, on a bien $BH = CK$, et que les droites (*BH*) et (*CK*) sont bien les hauteurs du triangles *ABC* issues de *B* et *C*.

2. Conjecture
   Emettre une conjecture sur la nature du triangle *ABC*.

3. Démonstration
   On pose $h = BH = CK$; c'est la longueur commune des hauteurs issues de *B* et de *C*.

   a) Exprimer de deux façons différentes l'aire du triangle *ABC* en fonction de *h*, d'abord en prenant pour base [*AC*], puis en prenant pour base [*AB*].
   b) En déduire une égalité qui permettra de conclure sur la nature du triangle *ABC*.

PROBLÈME N° 9 : Triangle : aire, périmètre et rayon du cercle inscrit

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème établit une relation classique dans le triangle, avec quelques applications. La généralisation proposée en B peut s'étendre à un polygone quelconque admettant un cercle inscrit. Il peut être posé en 5ème (avec des valeurs numériques), en 4ème, 3ème et 2nde avec les valeurs littérales.

A. Le cas d'un triangle

1. Le résultat

ABC est un triangle. On note *S* son aire, *p* son demi-périmètre, et *r* le rayon de son cercle inscrit. L'objectif est de trouver une relation entre *S*, *p* et *r*.

a) Construire un triangle quelconque *ABC*, puis son cercle inscrit dont on notera I le centre.
b) Exprimer en fonction de *r*, et des longueurs *AB*, *AC* et *BC*, les aires des triangles *AIB*, *AIC* et *BIC*.
c) Démontrer alors l'égalité : $\boxed{S = p \times r}$.

2. Applications (niveau 3ème, 2nde)

a) Soit *ABC* un triangle isocèle et rectangle en *A*, tel que $AB = 2$. Démontrer que le rayon du cercle inscrit à ce triangle est égal à $2 - \sqrt{2}$.
b) Soit *ABC* un triangle rectangle en *A* tel que $AB = 4$ et $AC = 3$. Montrer que le rayon de son cercle inscrit est un nombre rationnel.

B. Le cas d'un quadrilatère

1. Condition d'existence du cercle inscrit

On dit qu'un quadrilatère *ABCD* admet un cercle inscrit s'il existe un cercle tangent à chacun des quatre côtés du quadrilatère.

a) Montrer que la condition précédente est réalisée si et seulement si les quatre bissectrices du quadrilatère sont concourantes.
b) Montrer qu'un losange admet un cercle inscrit.
c) Donner un exemple de quadrilatère qui n'admet pas de cercle inscrit.

2. Généralisation de la propriété

Soit *ABCD* un quadrilatère qui admet un cercle inscrit. On note comme précédemment *r* le rayon de ce cercle, *S* l'aire du quadrilatère, *p* son demi-périmètre.
Démontrer à nouveau l'égalité : $\boxed{S = p \times r}$.

PROBLÈME N° 10 : Démonstration du concours des médianes d'un triangle

Objectif, niveau et difficultés – La démonstration proposée n'est pas la plus classique ; elle utilise les aires. Le début reprend le problème 4, avec une caractérisation de la médiane en termes d'aire. Le problème est relativement complexe, notamment en raison de l'utilisation du calcul littéral. Il est conseillé en 3ème (de bon niveau) et en 2nde.

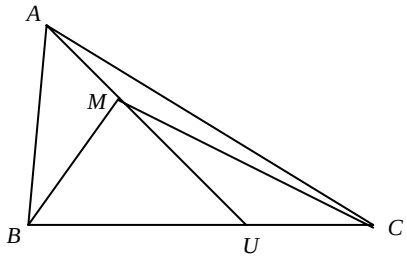
Question préliminaire

On considère deux fractions égales $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{d}$, avec $b \neq d$. On pose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

Vérifier l'égalité $(a-c) = k(b-d)$. En déduire que $\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

Première partie : propriété caractéristique de la médiane d'un triangle

On considère la figure ci-contre, où *M* est un point intérieur au triangle *ABC*. La droite (*AM*) coupe le segment [*BC*] en *U*.



1. a) On note *h* la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*.
   Exprimer l'aire du triangle *ABU* et du triangle *ACU* en fonction de *h* et des longueurs *BU* et *CU*.

   b) En déduire une expression du quotient $\frac{\text{aire}(ABU)}{\text{aire}(ACU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

2. Procéder de même pour obtenir une expression du quotient $\frac{\text{aire}(MBU)}{\text{aire}(MCU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

3. Démontrer à l'aide de la question préliminaire l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)} = \frac{UB}{UC}}$.

4. Propriété caractéristique de la médiane
   a) On suppose dans cette question que *M* appartient à la médiane issue de *A*.
   Quelle est alors la position du point *U* sur le segment [*BC*] ?
   En déduire que : $\boxed{\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)}$.

b) <u>Réciproque</u>
On suppose dans cette question que : $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$.
Démontrer que *M* appartient à la médiane issue de *A*.

<u>Deuxième partie : démonstration du concours des médianes</u>

Soit *ABC* un triangle, *A'*, *B'*, *C'* les milieux des côtés [*BC*], [*CA*], [*AB*].
Les segments médians [*AA'*] et [*BB'*] se coupent en *G*.

1. En utilisant le fait que *G* appartient au segment [*AA'*], justifier l'égalité :
$$\text{aire}(ABG) = \text{aire}(ACG).$$

2. Démontrer de même que : $\text{aire}(ABG) = \text{aire}(BCG)$.

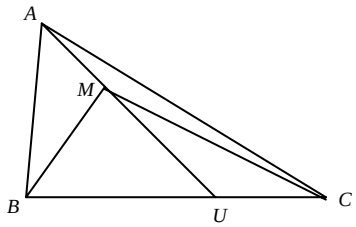
3. En déduire une nouvelle égalité d'aires, et démontrer que *G* appartient à la médiane (*CC'*).

4. Quelle propriété remarquable du triangle vient d'être démontrée ?

PROBLÈME N° 11 : Un alignement dans le trapèze

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de prouver, dans un trapèze qui n'est pas un parallélogramme, l'alignement classique de quatre points : les milieux des bases, les points d'intersection des diagonales et des côtés non parallèles. Le résultat admis n'étant pas si simple, ce problème est conseillé en classe de 2nde ou de 1ère S. D'autres démonstrations sont intéressantes (Thalès, les homothéties, la géométrie analytique, …).

Résultat admis

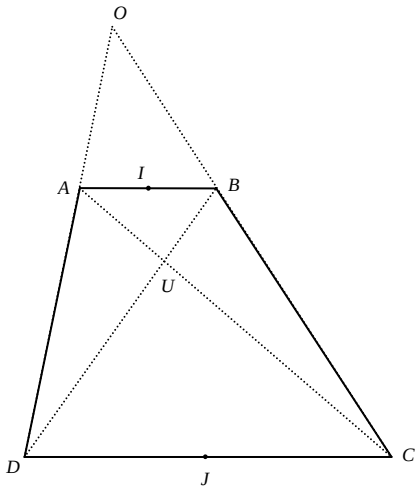


Soit M un point intérieur à un triangle ABC. Alors :

– si M appartient à la médiane issue de A, alors $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$;

– réciproquement, si $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$, alors M appartient à la médiane issue de A.

Problème



On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, qui n'est pas un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs des bases $[AB]$ et $[DC]$. On suppose que $AB < CD$.

Les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent en O, les diagonales (AC) et (BD) se coupent en U.

1. Alignement de O, I, J
   a) Comparer les aires des triangles OIA et OIB.
   b) Comparer les aires des triangles DIA et CIB.
   c) Comparer alors les aires des triangles OID et OIC.
   d) En déduire que les points O, I, J sont alignés.

2. Alignement de I, U , J
   On note A', I' et B' les symétriques de A, I et B par rapport à U.
   a) Démontrer que $B'A'CD$ est un trapèze et que I' est le milieu de $[A'B']$.
   b) En déduire, en utilisant la question 1, que U, I', J sont alignés.
   c) Prouver alors que I, U, J sont alignés.

3. Conclusion
Formuler une conclusion.

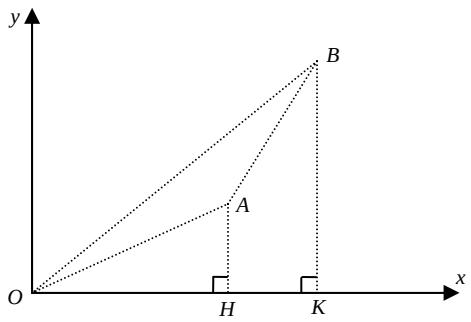
PROBLÈME N° 12 : Une condition analytique d'alignement

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit d'établir de façon originale, en utilisant les aires, la classique condition d'alignement de trois points. Bien entendu, cette démonstration s'adapte à la condition de colinéarité de deux vecteurs, souvent admise. La présence du calcul littéral ainsi que la problématique de l'alignement placent ce problème au niveau de la classe de 2nde.

Dans un repère d'origine *O*, supposé orthonormal, on considère les points $A(a,a')$ et $B(b,b')$.

Le but de ce problème est d'obtenir une condition portant sur *a*, *a'*, *b*, *b'* pour exprimer que les trois points *O*, *A*, *B* sont alignés.

On supposera pour fixer les idées que $a \leq b$ et $a' \leq b'$. Dans tous les autres cas, on pourra adapter sans difficulté la méthode décrite dans le questionnement.



Les parallèles à (*Oy*) menées de *A* et *B* rencontrent l'axe (*Ox*) respectivement en *H* et *K*.

1. Expliquer pourquoi la condition « *O*, *A*, *B* sont alignés » équivaut à la condition « le triangle *OAB* a une aire égale à 0 ».

2. Justifier l'égalité : $\text{aire}(OAB) = \text{aire}(OBK) - \text{aire}(OAH) - \text{aire}(ABKH)$.

3. Exprimer l'aire du triangle *OBK* en fonction de *b* et *b'*.

4. Exprimer l'aire du triangle *OAH* en fonction de *a* et *a'*.

5. Quelle est la nature du quadrilatère *ABKH* ?
   En déduire que : $\text{aire}(ABKH) = (b-a) \times \dfrac{(b'+a')}{2}$.

6. Démontrer alors que : $\boxed{\text{aire}(OAB) = \dfrac{1}{2}(ab' - ba')}$.

7. En déduire une condition d'alignement des trois points *O*, *A*, *B*.