↜Problème : modélisation et probabilités ↝

Dans une population de lycéens, la durée en minutes d'une conversation sur téléphone portable peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f, définie sur $\mathbb{R}$ par

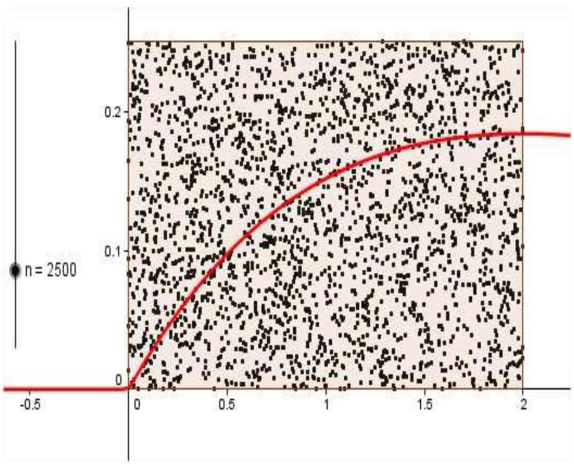
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{4} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Le but du problème est de déterminer la probabilité qu'une conversation sur téléphone portable dure plus de 4 minutes sachant qu'elle a déjà duré au moins 2 minutes.

Question préliminaire
Exprimer la probabilité cherchée en fonction de $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 4)$ et $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)$.

Partie 1 : estimation de $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)$ par la méthode de Monte Carlo
La méthode consiste à choisir successivement au hasard n points dans le rectangle $OABC$ où $A(2;0)$, $B(2;0,25)$ et $C(0;0,25)$, et à cet échantillon de n points on associe la fréquence f_n de points situés sous la courbe $\mathscr{C}$. Si n est « assez grand », la loi des grands nombres permet alors de dire que f_n est une « bonne approximation » de la probabilité qu'un point choisi au hasard dans $OABC$ appartienne au domaine $\mathscr{D}_1$ délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

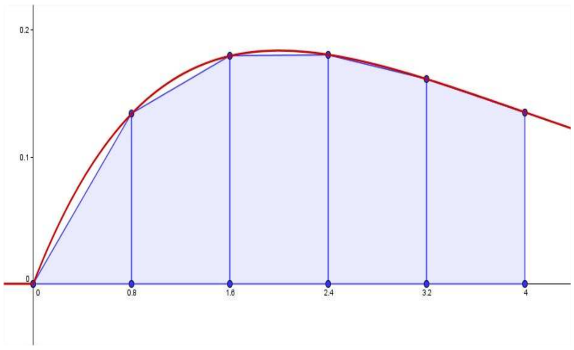
1. En notant $\mathscr{A}(OABC)$ l'aire du rectangle $OABC$, donner « une bonne approximation » A_n de l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ en fonction de f_n et $\mathscr{A}(OABC)$ pour n « assez grand ».
2. Obtention d'une telle approximation A_n à l'aide du logiciel *GeoGebra*.
   - Tracer la courbe de la fonction f et créer un curseur pour n allant de 0 à 10 000.
   - Créer la liste1 en rentrant dans la ligne de saisie :
     « Séquence[(AléaUniforme[0,2],AléaUniforme[0,0.25]),k,1,n,1] ».
   - À l'aide de la commande « NbSi[y(M)≤f(x(M)), M, liste1] », écrire la commande permettant d'obtenir l'approximation A_n obtenue pour l'aire de $\mathscr{D}_1$.
   - Quelle valeur obtenez-vous pour $n = 10\,000$?



Partie 2 : estimation de $P(0 \leq X \leq 4)$ par la méthode des trapèzes

La méthode consiste à diviser l'intervalle $[0;4]$ en n intervalles de longueur $\ell = \dfrac{4}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On approche l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$ délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$ par la somme des aires des n polygones $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$, où $A_k(k\ell;0)$ et $B_k(k\ell;f(k\ell))$, pour k entier naturel allant de 0 à $n-1$.

3. (a) Écrire un algorithme en langage courant prenant en entrée la valeur n et qui renvoie la somme des aires de ces n polygones.
   (b) Tester cet algorithme pour $n = 100$, puis pour $n = 1\,000$ et donner les valeurs obtenues.
4. Déduire des résultats obtenus précédemment une approximation de $P_{(X\geq 2)}(X > 4)$.



Partie 3 : aspect théorique et valeur exacte de $P_{(X\geq 2)}(X > 4)$

5. Calculer la dérivée de la fonction F définie sur $I = [0;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$, où a et b sont deux paramètres réels.
6. En déduire une primitive de la fonction f sur I, puis vérifier que f est bien une fonction densité.
7. En déduire la valeur exacte de $P_{(X\geq 2)}(X > 4)$. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4.
8. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer une primitive G de la fonction g définie sur I par $g(x) = \dfrac{1}{4}x^2e^{-\frac{x}{2}}$.
9. L'espérance de X est définie par $E(X) = \lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t xf(x)\,dx$. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

Compétences visées

Question	Chercher	Modéliser	Représenter	Calculer	Raisonner	Communiquer
0					×	×
1	×	×				
2		×	×			
3a)		×				×
3b)				×		
4	×		×		×	
5				×		
6					×	×
7	×			×		
8				×		
9				×		×