Problème : modélisation et probabilités

Dans une population de lycéens, la durée en minutes d'une conversation sur téléphone portable peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

On **admet** que f est bien une densité de probabilité, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O};\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Le but du problème est de déterminer la probabilité qu'une conversation sur téléphone portable dure plus de 4 minutes sachant qu'elle a déjà duré au moins 2 minutes.

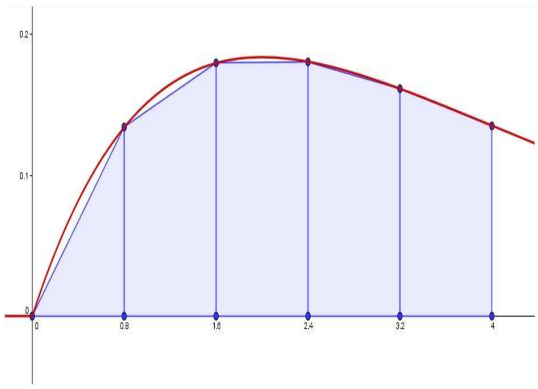
Partie 1 : estimation de $\mathrm{P}(0 \leq X \leq t)$ pour $t > 0$ par la méthode des trapèzes

La méthode consiste à diviser l'intervalle $[0; t]$ en n intervalles de longueur $\ell = \dfrac{t}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

On approche alors l'aire du domaine $\mathscr{D}_t$ délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = t$ par la somme des aires des n polygones $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$, où $A_k(k\ell; 0)$ et $B_k(k\ell; f(k\ell))$, pour k entier naturel allant de 0 à $n-1$.

1. *Cas particulier pour $t = 4$ et $n = 5$.*
   Justifier que l'approximation obtenue peut s'écrire
   $$\frac{2}{5}\left(f(0) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{8}{5}\right) + f\left(\frac{8}{5}\right) + f\left(\frac{12}{5}\right) + f\left(\frac{12}{5}\right) + f\left(\frac{16}{5}\right) + f\left(\frac{16}{5}\right) + f\left(\frac{20}{5}\right)\right).$$
2. *Cas général.*
   Quelle est l'instruction cachée par le cadre noir ?

Variables
n, t, s, ℓ, k de type nombres
Début
s prend la valeur 0
Demander la valeur de t
Demander la valeur de n
ℓ prend la valeur $\frac{t}{n}$
    Pour k allant de 0 à $n-1$ faire
    s prend la valeur $s+$[redacted]
    FinPour
s prend la valeur $\frac{\ell}{2} \times s$
Afficher s
Fin



3. Donner une approximation de $\mathrm{P}_{(X\geq 2)}(X > 4)$ sachant que :
   – pour $t = 2$ et $n = 1\,000$, on obtient en sortie la valeur 0,264 2 ;
   – pour $t = 4$ et $n = 1\,000$, on obtient en sortie la valeur 0,594 0.

Partie 2 : valeur exacte de $\mathrm{P}_{(X\geq 2)}(X > 4)$

4. Dériver la fonction F définie sur $I = [0; +\infty[$ par $F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où a et b sont deux paramètres réels.
5. En déduire une primitive de la densité f sur I, puis la valeur exacte de $\mathrm{P}_{(X\geq 2)}(X > 4)$.

Compétences visées

Question	Chercher	Modéliser	Représenter	Calculer	Raisonner	Communiquer
1	×			×		×
2		×		×		×
3	×		×		×	×
4				×		
5	×				×	