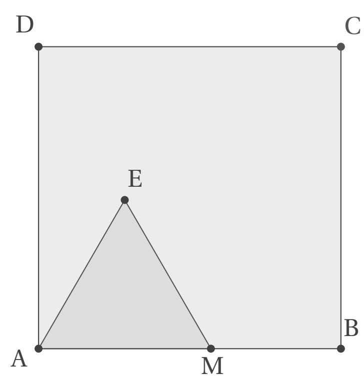
Résolution d'une équation par dichotomie

Présentation de l'algorithme :

Il s'agit d'utiliser la dichotomie pour résoudre une équation.
Cette équation sera du type $g(x) = 0$ avec g strictement croissante *et continue* sur un intervalle $[a; b]$ telle que $g(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

1. Présentation du problème

On considère un carré ABCD tel que AB = 4 cm. Soit M un point quelconque du segment [AB], on construit alors le point E tel que le triangle AME soit équilatéral.
On notera x la longueur du segment [AM].
Il s'agit de déterminer quel doit être la position de M sur [AB] pour que l'aire de AME soit égal au tiers de l'aire de ABCD.



a. A quel intervalle I appartient le réel x sachant que M est un point de [AB] ?

b. Soit f la fonction tel que $f(x)$ est l'expression de l'aire de AME en fonction de x. Justifier que f est croissante sur I.

c. Déterminer l'expression $f(x)$.

d. Justifier que la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \frac{16}{3}$ est croissante sur I. Puis calculer les images par g des bornes de l'intervalle I.

e. En admettant que la courbe se trace d'un trait continu. A l'aide d'un argument graphique, justifier le fait que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur I

f. Justifier que la solution de $g(x) = 0$ sont correspond à la position de M sur [AB] telle que l'aire de AME soit égale au tiers de l'aire de ABCD.

g. Calculer $g(1)$, en déduire que la solution de $g(x) = 0$ est supérieure à 1.

2. l'Algorithme en langage naturel :

```
DONNEES
        a,b nombres réels # bornes de l'intervalle I
        g fonction réels
        #g fonction strictement monotone (et continue) sur I telle que g(a)*g(b)<0
AUTRES VARIABLES
        x,im nombres réels
TRAITEMENT
        im=1
        tant que (im>0,1 ou im<-0,1)
                        donner à x la valeur de (a+b)/2
                        donner à im la valeur de g(x)
                        si im>0 alors
                                donner à b la valeur de x
                        sinon
                                donner à a la valeur de x
SORTIE
        afficher "Valeur approchée de la solution de l'équation g(x) = 0 ",x
```

3. Questionnement possible :

a. Faire fonctionner à la main l'algorithme.

b. Donner un intervalle qui contient $g(x)$ où x est la valeur affichée par l'algorithme. En notant α la solution de $g(x) = 0$ sur I, déterminer un intervalle dépendant de α qui contient x.

c. Programmer l'algorithme, et déterminer une valeur approchée de α.
Réponse attendue : $-0.1 < g(x) < 0,1$ *et* $g(\alpha) = 0$
donc $-0,1 < \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - \alpha^2) < 0.1 \Leftrightarrow -0,1 \times \frac{4}{\sqrt{3}} < (x+\alpha)(x-\alpha) < 0,1 \times \frac{4}{\sqrt{3}}$
Comme $\alpha > 1$, $(x+\alpha) > 1$ *donc* $-0,1 \times \frac{4}{\sqrt{3}} < (x-\alpha) < 0,1 \times \frac{4}{\sqrt{3}}$

d. Déterminer par résolution algébrique la valeur exacte de α et comparer cette réponse avec la valeur approchée trouvée précédemment.

e. Quelle modification doit-on apporter à l'algorithme pour améliorer la précision de la réponse qu'il fournit ?