Intersection d'une courbe et d'une droite

Présentation de l'algorithme :

Il s'agit de réaliser un algorithme qui recherche les coordonnées d'un point d'intersection d'une courbe et d'une droite.

1. **l'Algorithme en langue naturelle :**

```
DONNEES A ENTRER:
        d nombre réel  #abscisse de départ
        f fonction réelle # fonction de la courbe considérée
        a nombre réel #coefficient directeur de la droite
        b nombre réel #ordonnée à l'origine de la droite
        p nombre réel #pas de balayage initial
        s nombre réel #précision de la réponse

AUTRES VARIABLES
        e,c nombres réels #pour stocker les écarts absolus des ordonnées

TRAITEMENT
        si f(d)>(a*d+b) alors
                donner à e la valeur : f(d)-(a*d+b)
        sinon
                donner à e la valeur : (a*d+b)-f(d)
        tant que (p>s ou p<-s)
                si f(d+p)>(a*(d+p)+b) alors
                        donner à c la valeur : f(d+p)-(a*(d+p)+b)
                sinon
                        donner à c la valeur : (a*(d+p)+b)-f(d+p)
                si c<e alors
                        donner à d la valeur d+p
                        donner à e la valeur c
                sinon
                        donner à p la valeur -p/10

SORTIE
        afficher d
```

2. **Fonctionnement de l'algorithme :**

La fonction f et l'équation réduite de la droite D étant choisies, on choisit un réel d, un pas p et une précision s.
L'algorithme calcule alors la distance e entre les points d'abscisse d situés respectivement sur $\mathscr{C}_f$ et sur D, puis l'algorithme "se déplace" de p sur l'axe des abscisses et calcule la distance en cette nouvelle abscisse (stockée dans la variable c).
Si cette distance se réduit, le "déplacement" se poursuit dans le même sens avec le même pas, sinon l'algorithme change le sens du parcours (multiplication de p par -1) et réduit le pas p (division du pas par 10).
On continue de parcourir l'axe des abscisses tant que le pas reste à l'extérieur de l'intervalle $[-s; s]$.

Remarque : f, a et b ne variant jamais durant l'algorithme, on peut pour simplifier l'algorithme remplacer $f(x)$ par son expression et a et b par leurs valeurs respectives dans tout l'algorithme. Les variables f, a et b ne sont alors plus nécessaires. Même remarque pour la précision s.

3. **Questionnement possible :**
   - **a.** Faire fonctionner l'algorithme à la main dans le cas où $d = 3$, $p = 1$, $s = 0,1$, $f(x) = x^2$, $a = 1$ et $b = 2$.
   - **b.** Le nombre affiché par l'algorithme est-il l'abscisse d'un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x + 2$?
   - **c.** Faire fonctionner l'algorithme à la main dans le cas où $d = 2$, $p = 1$, $s = 0,1$, $f(x) = x^2$, $a = 1$ et $b = 2$.
   - **d.** Amélioration possible pour le cas où $d = 2$:
     L'algorithme est-il optimal dans ce cas ?
     Proposer une solution pour améliorer l'algorithme dans ce cas.

Faire vérifier le travail par le professeur.

   - **e.** Programmer l'algorithme et le faire fonctionner dans le cas où $d = 3$, $p = 1$, $s = 0,000001$, $f(x) = x^2$, $a = 1$ et $b = 2$.

4. **Justification possible dans le cas de deux fonctions affines**
   - **a.** Décrire comment fonctionne l'algorithme.
   - **b.** Expliquer pourquoi dans le cas où f est une fonction affine de coefficient directeur différent de a, l'algorithme donne toujours une valeur approchée ou exacte de l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

Prolongement possible :

En seconde,

— On peut s'interroger sur le résultat que donne l'algorithme lorsque la courbe ne coupe pas la droite. Dans ce cas, en effet, l'algorithme ne renvoie pas l'abscisse d'un point d'intersection, mais renvoie l'abscisse pour laquelle la différence des ordonnées des points de la courbe et de la droite est minimale.
Par exemple, on peut faire travailler les élèves avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$ avec $a = 1$ et $b = 2$, en choisissant différentes valeurs pour d (-3 ; 5).

— Lorsque sur l'intervalle de travail, la fonction qui à x associe $f(x)-(ax+b)$ s'annule plusieurs fois, l'algorithme peut ne pas donner la même réponse suivant l'abscisse d de départ.
Par exemple, on peut faire travailler les élèves avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ et $b = 2$, en choisissant différentes valeurs pour d (-3 ; 5).

En première S,

— On peut s'interroger sur des cas où sur l'intervalle de travail, la fonction qui à x associe $f(x) - (ax + b)$ n'est ni concave ni convexe.
Par exemple, on peut faire travailler les élèves avec la fonction f définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ avec $a = 1,5$ et $b = 0,5$, en choisissant différentes valeurs pour d (-1 ; 0 ; 1 ; 2 et 3).

— On peut aussi s'interroger sur ce que va chercher cet algorithme lorsque $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}$, $d = 2$, $a = 1$,et $b = 0$. (Il y a aussi des valeurs de d qui provoque une erreur $d = -2$.)
ou encore lorsque $d = 2$, $a = 2$,et $b = 1$.