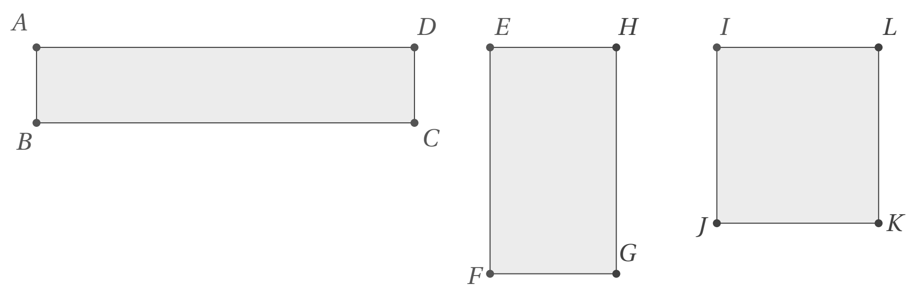
Calculer la racine carrée d'un nombre

Présentation de l'algorithme :

Il s'agit de fournir un algorithme qui calcule les racines carrées d'un réel positif quelconque.

1. **Introduction possible à l'algorithme**
   On considère un réel positif $b = 5$,
   a. Soit ABCD un rectangle d'aire b tel que $AB = 1$. Déterminer la longueur de BC et calculer AB^2 et BC^2.
   b. Soit EFGH un rectangle d'aire b tel que $EF = \frac{AB+BC}{2}$. Déterminer la longueur de FG et calculer EF^2 et FG^2.
   c. Soit IJKL un rectangle d'aire b tel que $IJ = \frac{EF+FG}{2}$. Déterminer la longueur de JK et calculer EF^2 et JK^2.



   d. Que peut-on espérer en poursuivant ce procédé ?
   e. Recommencer le procédé avec $b = 9$.
2. **l'Algorithme en langage naturel :**

```
ENTREES
        b nombre réel # nombre dont on cherche à déterminer la racine carrée
AUTRES VARIABLES
        a,fa nombres réels
        e nombre réel # erreur commise
TRAITEMENT
        donner à a la valeur 1
        donner à e la valeur 1
        tant que (e>0.001)
                donner à fa la valeur de (a+b/a)/2
                si fa>a alors
                        donner à e la valeur de (fa-a)
                sinon
                        donner à e la valeur de (a-fa)
                donner à a la valeur de fa
SORTIE
        afficher "Valeur obtenue : ",a
```

3. Questionnement possible :

a. Soit b un nombre réel strictement positif, on pose $f(x) = \frac{\left(x+\frac{b}{x}\right)}{2}$,

i. Montrer que si $x > 0$ alors $f(x) > 0$.

ii. Déterminer la solution de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^+$.

b. Faire fonction à la main l'algorithme en donnant à b la valeur 5. Que peut-on dire de la valeur a qui s'affiche ?

c. En général, que peut-on dire de la valeur a qui s'affiche lorsque l'algorithme s'arrête ?

d. Faire programmer l'algorithme.

e. Quelle commande peut-on ajouter pour vérifier la réponse de la question 2 ?
(réponse attendue > *Ajouter en fin d'algorithme :* `afficher "Son carré est ",a^2`)

Repères mathématiques :
La méthode utilisée ici est une méthode ancienne d'extraction des racines carrées nommé méthode de Héron ou algorithme de Babylone. Elle porte le nom d'Héron d'Alexandrie, mathématiciens grecs du premier siècle après JC. Il semble cependant que cette méthode est nettement plus ancienne.

Cette méthode est un cas particulier de la méthode de Newton qui permet de résoudre $f(x) = 0$ en calculant les termes d'une suite (x_n) qui vérifie $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Dans le cas où $f(x) = x^2 - b$ si l'on choisit $x_0 = 1$, la méthode de Newton et celle de Hèron sont identiques.