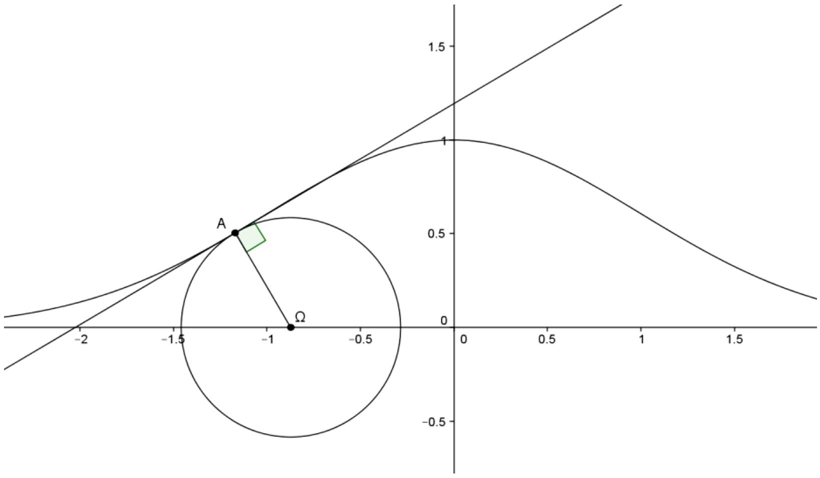
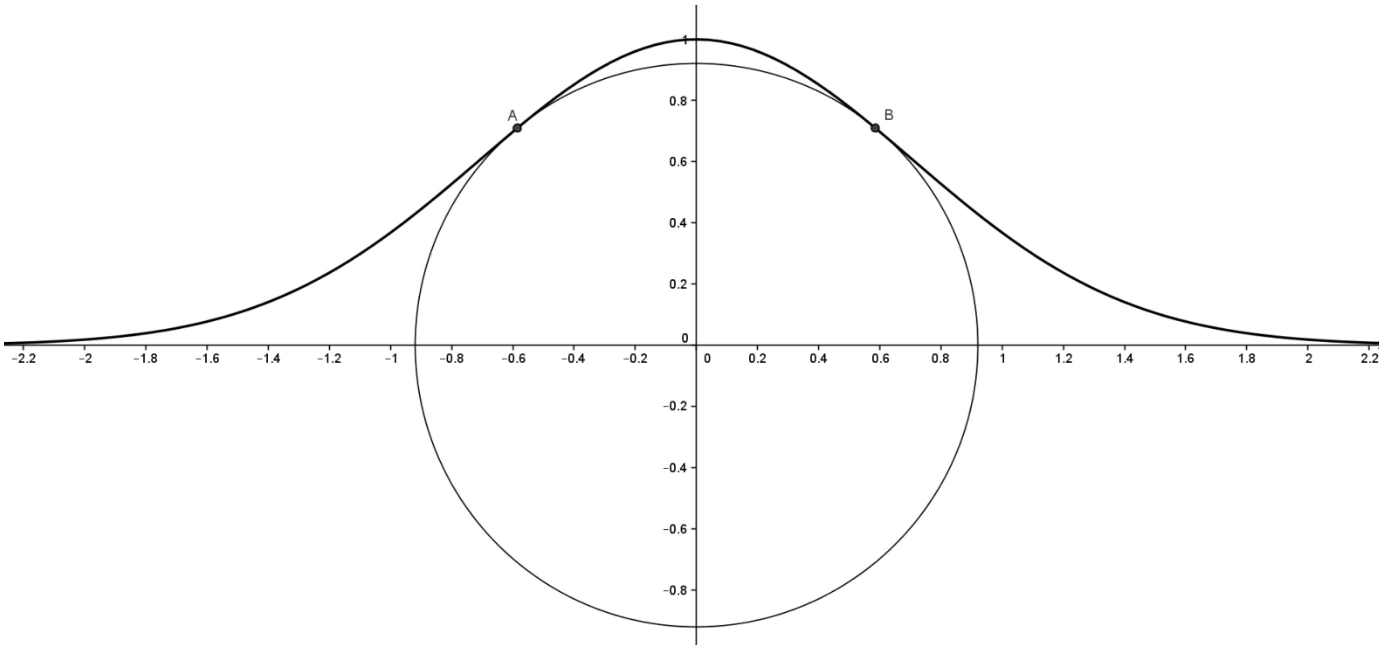
Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative $C_f$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

On dit qu'un cercle de centre Ω est tangent à la courbe $C_f$ en un point A si la tangente à $C_f$ en A est perpendiculaire au rayon du cercle [ΩA].




Le but du problème est de déterminer le **rayon** R du cercle de centre O tangent à $C_f$ en deux points distincts A et B. (L'unicité d'un tel cercle pourra être justifiée lors de l'étude).




On propose deux méthodes pour rechercher la valeur exacte du rayon R du cercle de centre O tangent à $C_f$ en deux points distincts :

**Partie 1 :** tangente à la courbe et normale à cette tangente

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la courbe $C_f$, un point mobile M sur $C_f$, la tangente $T_M$ à $C_f$ en M et le cercle de rayon OM. Faire afficher la mesure de l'angle entre les droites $T_M$ et (OM). Pour quelles abscisses du point M ces deux droites sont-elles perpendiculaires ? En déduire une valeur approchée du rayon R cherché.
2) Déterminer les valeurs exactes des abscisses $x_1$ et $x_2$ des points A et B en lesquels il existe un cercle tangent à la courbe $C_f$.
3) Déterminer la valeur exacte de R et comparer avec le résultat obtenu avec le logiciel à la question 1.

**Partie 2 :** distance d'un point à une courbe

On admet que le cercle cherché sera tangent à la courbe $C_f$ en M lorsque la distance OM est la plus petite possible. On appelle distance du point O à la courbe $C_f$ le minimum de OM lorsque M décrit $C_f$.

Déterminer la distance du point O à la courbe $C_f$.