Nombres de Fibonacci et nombres de Lucas

Présentation du sujet :

On définit la suite (F_n) de Fibonacci par la donnée des deux premiers termes $F(1) = 1$, $F(2) = 1$, ensuite chaque nouveau terme est obtenu en additionnant les deux termes précédents (ainsi on a la relation (dite de récurrence) $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ pour $n > 2$).
Les nombres de Fibonacci sont tous les termes de cette suite. Ainsi :

$F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$
$F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$
$F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$

On définit de la même façon les nombres de Lucas, en changeant seulement les deux premiers termes de la suite notée (L_n) par $L(1) = 1$, $L(2) = 3$.

1. Calculer les 5 termes suivants de la suite de Fibonnaci et les 5 premiers de la suite des nombres de Lucas, puis comparer $F(2) \times F(5)$ et $F(4)^2 - F(3)^2$. Faire de même avec $L(2) \times L(5)$ et $L(4)^2 - L(3)^2$ et pour finir comparer $L(5) + L(3)$ avec $5 \times F(4)$.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les 40 premiers nombres de Fibonacci et de Lucas.
3. À l'aide du tableur, pour n prenant les valeurs entre 1 et 38, vérifier pour ces nombres que :
   (a) $F(n-1) \times F(n+2) = F(n+1)^2 - F(n)^2$.
   Autrement dit, le produit de deux nombres de Fibonacci de rangs $(n-1)$ et $(n+2)$ est égal à la différence des carrés de deux nombres de rangs (n + 1) et n.
   (b) $L(n-1) \times L(n+2) = L(n+1)^2 - L(n)^2$.
   (c) $L(n) = F(n+1) + F(n-1)$.
   (d) $L(n) \times F(n) = F(2n)$. Pour faire afficher seulement les termes pairs des nombres de Fibonacci, on utilisera la fonction DECALER.
   (e) $L(n+1) + L(n-1) = 5 \times F(n)$.
   (f) $F(n+1) \times F(n-1) - F(n)^2 = (-1)^n$.

Faire vérifier le travail par le professeur.

4. Sachant que pour $n \geq 1$, $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$,
   prouver que : $F(n-1) \times F(n+2) = F(n+1)^2 - F(n)^2$.

Production demandée :

- Réaliser l'étude sur Tableur.
- Émettre une conjecture sur les différentes relations obtenues.
- Démontrer les différentes propriétés conjecturées.