

**MATHÉMATIQUES ÉOLIENNES**

- Étude mathématique du gisement éolien d'un site (activité type formation)
- Vitesses de vents et implantation d'éoliennes (évaluation)
- Annexe 1 : copies d'écrans de fichiers joints
- Annexe 2 : compétences ciblées (activité et évaluation)
- Annexe 3 : commentaires à propos de la modélisation retenue

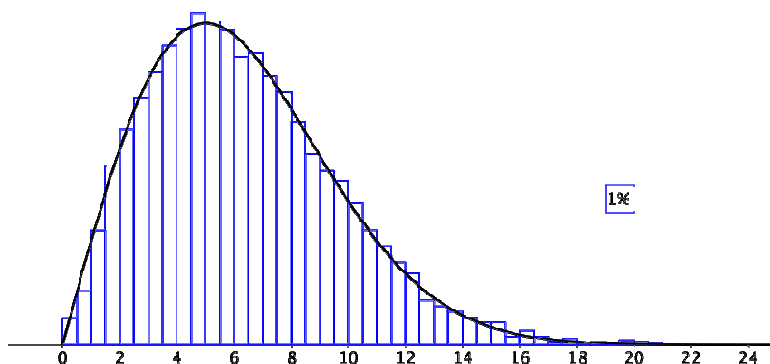
### Étude de la vitesse du vent sur un site pour l'implantation d'éoliennes

Un site a été choisi pour y implanter un parc d'éoliennes. Afin de se prononcer sur la pertinence de ce choix, on se propose d'étudier la vitesse du vent sur ce site, à partir de relevés statistiques.

1. Une étude statistique menée pendant cinq ans a permis de relever chaque jour la vitesse moyenne du vent. Les fréquences observées par tranches de vitesses d'amplitude  $3 \text{ m.s}^{-1}$  sont récapitulées dans le tableau suivant :

Vitesse moyenne du vent(en $\text{m.s}^{-1}$ )	[0;3[	[3;6[	[6;9[	[9;12[	[12;15[	[15;18[	[18;21[	[21;24[
Fréquence	0,15814	0,35036	0,28580	0,14628	0,04492	0,0119	0,00256	0,00004

- a) À l'aide d'un tableur, représenter l'histogramme de cette série.
- b) En récupérant l'ensemble des relevés et en les regroupant par tranches de vitesse d'amplitude  $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ , l'histogramme obtenu est le suivant (en abscisses : la vitesse moyenne du vent) :



Cet histogramme est-il cohérent avec celui obtenu au a) ?

2. On modélise la vitesse moyenne du vent un jour donné par une variable aléatoire  $X$  admettant une densité.

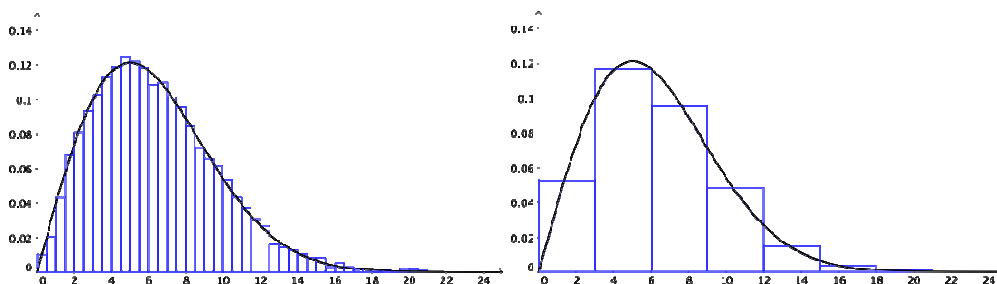
D'après les histogrammes de fréquences précédents, est-il envisageable que la loi de cette variable aléatoire soit une loi uniforme ? Une loi exponentielle ?

3. L'allure des histogrammes de fréquences conduit à modéliser la densité de la variable aléatoire  $X$  par une fonction  $f$ , nulle sur  $]-\infty ; 0[$ , et vérifiant pour tout  $x \geq 0$  :  $f(x) = 2ax e^{-ax^2}$ , où  $x$  est la vitesse moyenne du vent un jour donné, exprimée en  $\text{m.s}^{-1}$ , et  $a$  une constante réelle à déterminer.

Déterminer la valeur de  $a$  en utilisant, au choix, l'une des deux méthodes décrites ci-après.

#### Méthode 1 : par tâtonnement à l'aide d'un grapheur

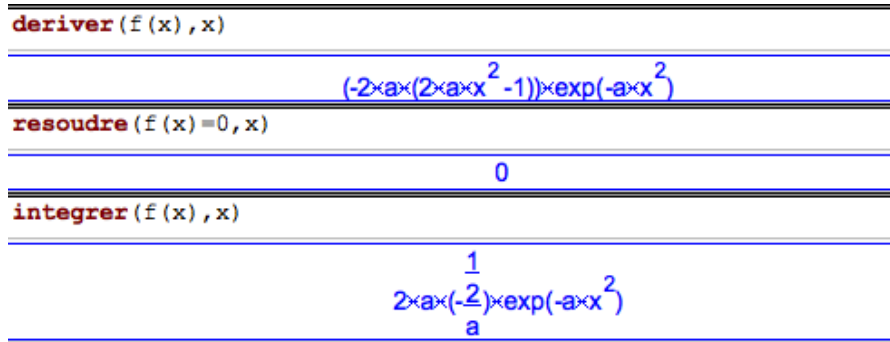
En faisant varier le paramètre  $a$ , on cherchera à ajuster au mieux la courbe de la fonction  $f$  à l'un des histogrammes de la question 1., comme l'évoquent les schémas ci-après.



On pourra utiliser l'un des fichiers fournis stat\_gisement\_eolien.xlsx ou stat\_gisement\_eolien.ggb, avec l'utilisation telle qu'elle est décrite dans l'annexe 1.

**Méthode 2 : en exploitant un logiciel de calcul formel**

On déterminera graphiquement quelle vitesse du vent semble apparaître avec la plus grande fréquence, et l'on pourra exploiter les résultats fournis par un logiciel de calcul formel, dont une fenêtre est reproduite ci-après par copie d'écran.



4. Les caractéristiques techniques de cette éolienne sont telles que celle-ci ne peut fonctionner avec des vitesses de vent inférieures à  $2 \text{ m.s}^{-1}$ , ni avec des vitesses de vent supérieures à  $14 \text{ m.s}^{-1}$ . On admet qu'à un instant donné, sur le site considéré, la probabilité d'obtenir une vitesse  $V$  de vent comprise entre deux valeurs  $v_1$  et  $v_2$ , exprimées en  $\text{m.s}^{-1}$ , peut être estimée par la formule :

$$p(v_1 \leq V \leq v_2) = \int_{v_1}^{v_2} 0,04 x e^{-0,02x^2} dx.$$

Quelle est, arrondie au millième, la probabilité de fonctionnement de cette éolienne à un instant donné ?

5. En fonctionnement, la puissance restituée, en watts, par cette éolienne pour une vitesse de vent  $V$ , exprimée en  $\text{m.s}^{-1}$ , est donnée par la formule :

$$P(V) = 4,65(V - 2)^3.$$

- a) Quelle est la puissance maximale restituée par cette éolienne ?
- b) Pour estimer la puissance moyenne (en watts) espérée restituée par cette éolienne, on utilise la formule suivante :

$$P_{moy} = 44,64 + \sum_{k=3}^{13} 0,186(k - 2)^3 k e^{-0,02k^2}.$$

Écrire en langage naturel un algorithme permettant de calculer la puissance moyenne espérée de cette éolienne.

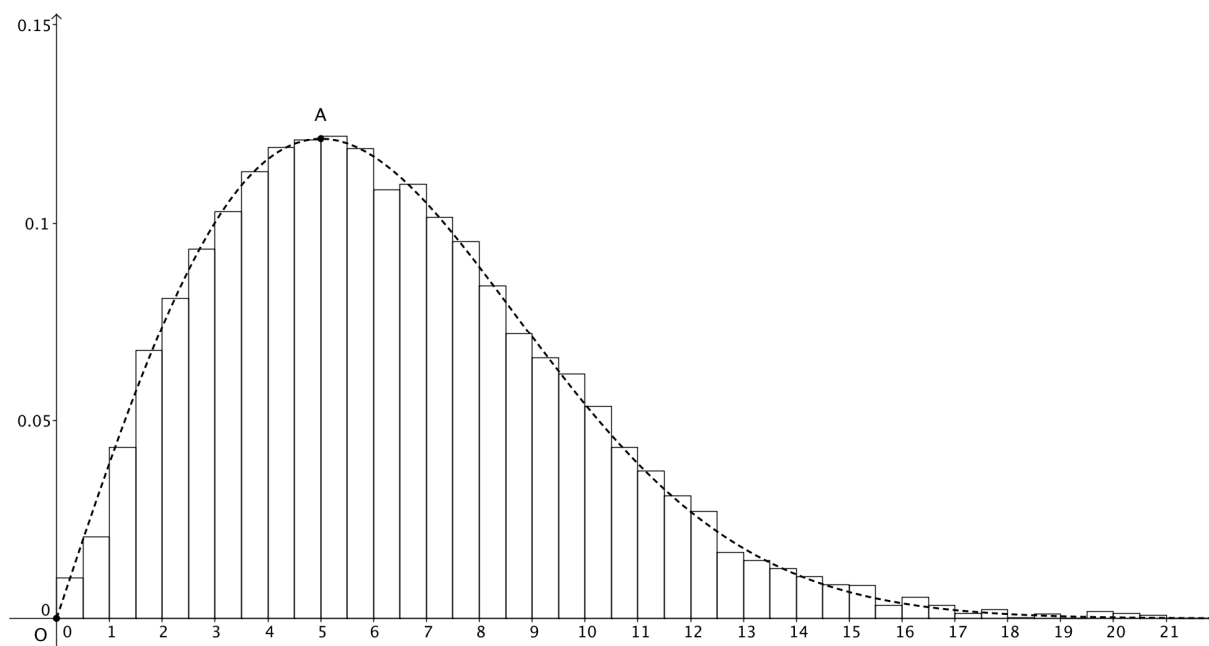
Programmer cet algorithme sur calculatrice ou sur ordinateur et donner une estimation de cette puissance.

- c) Le facteur de charge est le rapport (puissance moyenne) / (puissance maximale).  
On considère qu'un site d'implantation est bon lorsque le facteur de charge généralement constaté est proche de 24 %.  
Le site étudié est-il un bon site d'implantation ?

### Vitesse du vent sur un site d'implantation d'un parc d'éoliennes

Un site a été choisi pour y implanter un parc d'éoliennes. Le but de ce problème est de modéliser la vitesse du vent sur ce site à partir de relevés statistiques (partie A), d'étudier le modèle (partie B), puis de déterminer quelques caractéristiques de l'éolienne (partie C).

Une étude menée pendant cinq ans a permis de relever chaque jour la vitesse moyenne du vent. Les fréquences observées par tranches de vitesses d'amplitude  $0,5 \text{ m.s}^{-1}$  sont récapitulées graphiquement dans l'histogramme ci-après.



Afin de modéliser la distribution de ces fréquences, et d'approcher au mieux les bords supérieurs des rectangles, on considère une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2ax e^{-ax^2},$$

où  $x$  est la vitesse moyenne du vent un jour donné, exprimée en  $\text{m.s}^{-1}$ , et  $a$  une constante réelle à déterminer.

La fonction  $f$  a été représentée ci-dessus par une courbe  $\Gamma$  dans un repère superposé à l'histogramme. Cette courbe  $\Gamma$  passe par l'origine  $O(0;0)$  du repère et par le point A d'abscisse 5. Par ailleurs, la fonction  $f$  admet un maximum pour  $x = 5$ .

#### Partie A

Le but de la partie A est de déterminer le coefficient  $a$ .

1. À l'aide des informations données précédemment, donner les valeurs de  $f(0)$  et  $f'(5)$ .
2. Montrer que pour tout réel  $x$  positif :  $f'(x) = 2ae^{-ax^2}(1 - 2ax^2)$ .
3. Dédire des deux questions précédentes que  $a = 0,02$ .

## Partie B

Cette partie a pour but d'étudier les variations de la fonction  $f$ , définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 0,04 x e^{-0,02x^2}.$$

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$ , puis en déduire les variations de la fonction  $f$ .  
Sont-elles conformes au graphique donné ?
3. Donner une valeur approchée à 0,001 près du maximum de la fonction  $f$ .

## Partie C

1. Les caractéristiques techniques de cette éolienne sont telles que celle-ci ne peut fonctionner avec des vitesses de vent inférieures à  $2 \text{ m.s}^{-1}$ , ni avec des vitesses de vent supérieures à  $14 \text{ m.s}^{-1}$ . On admet qu'à un instant donné, sur le site considéré, la probabilité d'obtenir une vitesse  $V$  de vent comprises entre deux valeurs  $v_1$  et  $v_2$ , exprimées en  $\text{m.s}^{-1}$ , peut être estimée par la formule :

$$p(v_1 \leq V \leq v_2) = \int_{v_1}^{v_2} 0,04 x e^{-0,02x^2} dx.$$

Quelle est, arrondie au millième, la probabilité de fonctionnement de cette éolienne à un instant donné ?

2. On admet que la puissance moyenne, espérée, restituée par cette éolienne peut être estimée, en watts, par la formule suivante :

$$P = 44,64 + \sum_{k=3}^{13} u_k = 44,64 + u_3 + u_4 + \dots + u_{13},$$

avec, pour  $k$  compris entre 3 et 13 :  $u_k = 0,186(k-2)^3 k e^{-0,02k^2}$ .

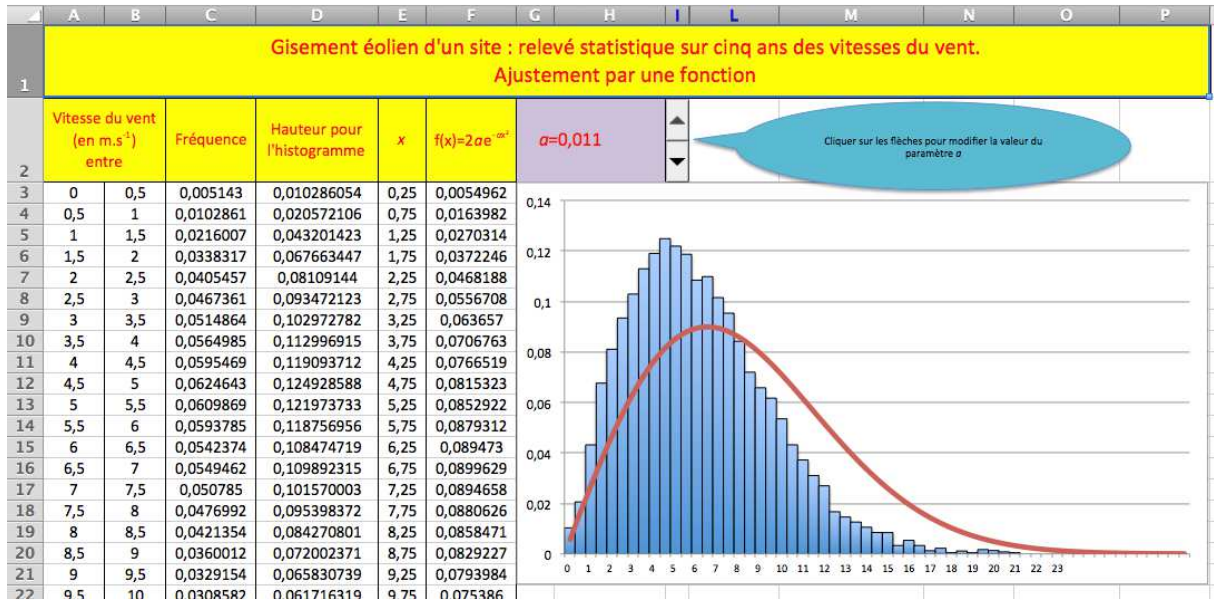
Compléter les lignes 4 et 5 de l'algorithme suivant, de façon à ce que la valeur de  $P$  soit affichée en sortie.

1	<b>Variables :</b>	$k$ et $P$ sont des nombres
2	<b>Initialisation :</b>	Affecter la valeur 3 à $k$
3		Affecter la valeur 44,64 à $P$
4	<b>Traitement :</b>	Tant que $k \leq \dots\dots\dots$
5		$P$ prend la valeur $\dots\dots\dots$
6		$k$ prend la valeur $k + 1$
7		Fin tant que
8	<b>Sortie :</b>	Afficher $P$

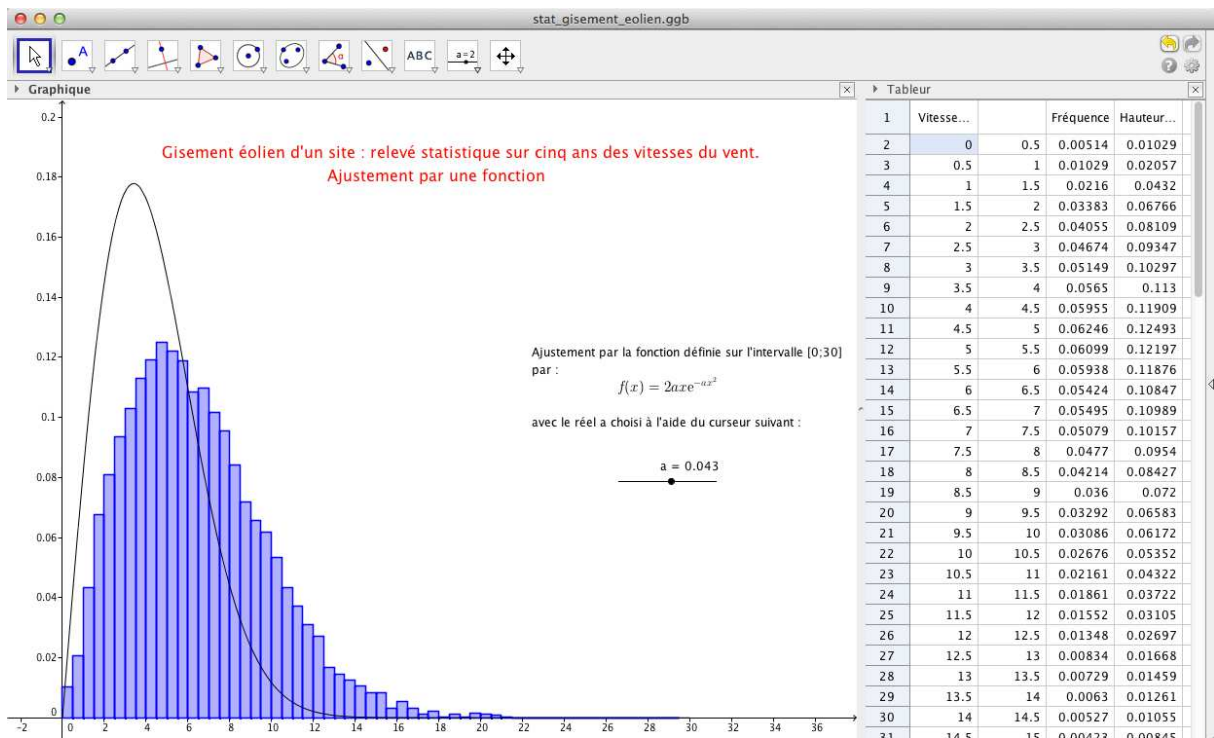
# ANNEXE 1

## Copies d'écrans des fichiers stat\_gisement\_eolien.xlsx et stat\_gisement\_eolien.ggb.

stat\_gisement\_eolien.xlsx :



stat\_gisement\_eolien.ggb



## ANNEXE 2 – Les compétences ciblées

Compétences (développées, évaluées)	Activité formation	Évaluation
<b>Chercher</b>		
Analyser un problème.	X	X
Extraire, organiser et traiter l'information utile.	X	X
Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture.	X	X
Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.	X	X
<b>Modéliser</b>		
Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques ...).	X	X
Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.	X	
Valider ou invalider un modèle.	X	X
<b>Représenter</b>		
Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique.	X	
Passer d'un mode de représentation à un autre.	X	X
Changer de registre.	X	X
<b>Calculer</b>		
Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel).	X	X
Mettre en œuvre des algorithmes simples.	X	X
Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.	X	X
Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).		X
<b>Raisonner</b>		
Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.	X	X
Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis...		
Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence...).		
Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.	X	X
<b>Communiquer</b>		
Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel.	X	X
Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.	X	X
Critiquer une démarche ou un résultat.	X	X
S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.	X	X

### ANNEXE 3 – Commentaires à propos de la modélisation retenue

La modélisation de la distribution de la fréquence des vents sur un site éolien est communément décrite par une *distribution de Weibull*, définie par :

$$f(v) = \frac{k}{A} \left( \frac{v}{A} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{A}\right)^k}$$

où  $A$  est un réel strictement positif, appelé paramètre d'échelle de la distribution, proportionnel à la vitesse moyenne des vents, et  $k$  un réel strictement positif, appelé paramètre de forme. Dans le cas particulier  $k = 2$ , on retrouve la *distribution de Rayleigh*, qui est la distribution standard utilisée par les fabricants d'éoliennes pour établir les caractéristiques techniques de leurs matériels. En pratique, ce coefficient prend souvent des valeurs comprises entre 1 et 3.

Les sujets proposés ici s'appuient sur une distribution réelle des vents<sup>1</sup> où le site a été choisi de telle façon que le paramètre de forme soit très proche de 2, afin d'obtenir une fonction définie par une expression algébrique aussi simple que possible.

L'estimation de la puissance restituée par une éolienne dépend bien évidemment de son type et de ses caractéristiques techniques qui délimitent également sa plage de fonctionnement<sup>2</sup>.

La puissance moyenne s'exprime de la façon suivante :

$$P_{moy} = \int_2^{14} P(V) f(V) dV$$

Le calcul qui en découle dans ces activités, est une approximation de cette puissance moyenne, par la méthode des trapèzes, avec une hauteur de une unité pour chacun des trapèzes, ce qui conduit à :

$$P_{moy} \approx \frac{P(2)f(2) + P(14)f(14)}{2} + \sum_{k=3}^{13} P(k)f(k)$$

On obtient ainsi la formule :

$$P_{moy} = 44,64 + \sum_{k=3}^{13} 0,186(k-2)^3 k e^{-0,02k^2}$$

qui pourrait être comparée avec profit aux données fournies par les fichiers [stat\\_gisement\\_eolien.xls](#) ou [stat\\_gisement\\_eolien.ggb](#).

---

<sup>1</sup> Atlas Éolien de la Région Bourgogne : <http://www.region-bourgogne.fr>

<sup>2</sup> On pourra se référer à la page 8 du *RAPPORT SUR L'ÉTAT ACTUEL ET LES PERSPECTIVES TECHNIQUES DES ÉNERGIES RENOUVELABLES* par MM. BIRRAUX et LE DÉAUT, Députés, <http://www.assemblee-nationale.fr/rap-ocst/energies/r3415.asp>