Maximum d'une aire variable

Présentation du sujet :

Soit $ABCD$ un carré de côté 4 cm. On place M sur $[CD]$ tel que $DM = x$.
E et F sont respectivement les points d'intersection de $[AD]$ avec le cercle de centre D de rayon DM et de [BC] avec le cercle de centre C de rayon CM.
Quelle doit-être la position de M sur $[DC]$ pour que l'aire du quadrilatère $EBFM$ soit maximale ?

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie, faire la figure correspondant à l'énoncé.
2. A l'aide des outils du logiciel de géométrie, afficher la longueur de DM ainsi que l'aire de $EBFM$.
3. Conjecturer la valeur maximale de l'aire du quadrilatère ainsi que la valeur de x rendant cette aire maximale.

Faire vérifier votre travail par le professeur.

4. Sachant que $DM = x$, exprimer en fonction de x :
   (a) L'aire du triangle AEB.
   (b) L'aire du triangle DEM.
   (c) L'aire du triangle CMF.
5. En déduire que l'aire du quadrilatère $EBFM$ est égale à $6x - x^2$.
6. Montrer que pour $x \in [0; 4]$

$$6x - x^2 = 9 - (x - 3)^2.$$

7. En déduire pour quelle valeur de x l'aire du quadrilatère $EBFM$ est maximale et donner la valeur de cette aire.

Production demandée :

– Fichier du logiciel de géométrie obtenu aux questions 1 à 3.
– Copie contenant les réponses aux questions 4 à 7.