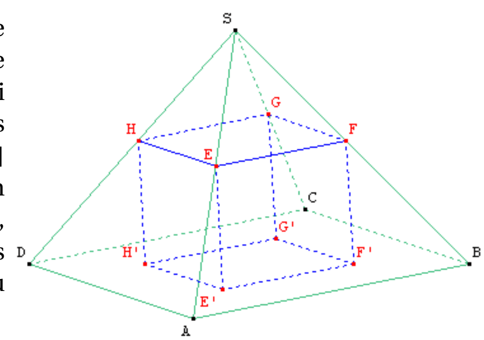
Optimisation d'un volume

Présentation du sujet :

On se propose de déterminer quel est le plus grand volume que l'on peut obtenir pour un pavé droit contenu dans une pyramide régulière à base carré dont la base est contenue dans la base de la pyramide.

Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S et de base le carrée ABCD tels que AB = 4 cm et tels que la hauteur de la pyramide mesure 3 cm. On admettra que le pavé droit qui aura le plus grand volume est un pavé droit dont les sommets opposés à la base sont sur les arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD] de la pyramide. On notera E, F, G et H ces sommets et on notera E′, F′, G′ et H′ les sommets de la base du pavé droit, ce sont les points d'intersection des droites perpendiculaires au plan (ABC) passant respectivement par E, F, G et H et du plan (ABC).



1. **Construction d'une figure**

   a. Avec geoplan-geospace dans une nouvelle figure de l'espace, créer les points A, B,C et D de coordonnées respectives (2,2), (2,-2), (-2,-2) et (-2,2) dans le plan muni du repère oxy, créer le point S d'abscisse 3 sur la droite graduée oz. Puis créer la pyramide P1 définie par les sommets S, A, B, C et D et créer un point libre E sur le segment [AS].

   b. Construire à l'aide du logiciel, les F, G et H. Puis constuire les points E′, F′, G′ et H′. Créer enfin b1 le pavé droit EFGHE'F'G'H'.

   c. Créer une variable numérique x dont la valeur est la longueur EE', et une variable numérique y dont la valeur est le volume de b1. *Sauvegarder votre figure sans la fermer.*

   d. Dans une nouvelle figure du plan, créer deux variables réelles libres x et y, puis créer le point M de coordonnées (x, y). Cliquer sur Piloter -> Importer, puis sur fenêtre -> mosaïque verticale. Faire afficher la trace du point M, puis déplacer le point E sur [AS]

   e. Conjecturer la valeur de EE′ pour laquelle le volume du pavé b1 est maximal.

Faire vérifier votre figure et votre conjecture par le professeur.

2. On admet que le quadrilatère E′F′G′H′ est un carré.

   a. Dessiner une coupe du plan SAC.
   En déduire que $A'E' = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$, puis que $E'G = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}x$.

   b. Calculer E′F′. En déduire que le volume de $V(x)$ du pavé droit s'exprime en fonction de x par : $V(x) = \frac{16}{9}(x^3 - 6x^2 + 9x)$.

   c. Á l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel grapheur, conjecturer la valeur maximale de $V(x)$ lorsque x varie entre 0 et 3. On note V_{max} cette valeur.

   d. Démontrer l'égalité : $V_{max} - V(x) = \frac{16}{9}(x-1)^2(-4+x)$.(On pourra développer $(x-1)^2(-4+x)$).

   e. En étudiant le signe de $(x-1)^2(x-4)$, démontrer la conjecture émise concernant la valeur maximale de $V(x)$.

Faire vérifier votre travail par le professeur.

Production demandée :

— Fichiers informatiques obtenus aux questions 1a, 1b, 1c et 1d.
— Copie contenant les réponses aux questions 1e, 2a, 2b, 2c, 2d, et 2e.