Triplets pythagoriciens

Présentation du sujet :

Un triplet pythagoricien $\{a,\ b,\ c\}$ est une famille de trois nombres entiers naturels où le carré du plus grand est égal à la somme des carrés des deux autres, autrement dit le triplet $\{a,\ b,\ c\}$ est un triplet pythagoricien lorsque $c^2 = a^2 + b^2$.

1. Vérifier que les triplets $\{3\,;\,4\,;\,5\}$, $\{5\,;\,12\,;\,13\}$ et $\{20\,;\,21\,;\,29\}$ sont des triplets pythagoriciens.

   Formule d'Euclide :
   Soit u et v deux entiers vérifiant $1 \leq v < u$. On pose $a = 2uv$; $b = u^2 - v^2$; $c = u^2 + v^2$.

2. À l'aide d'un tableur, vérifier que le triplet $\{a,\ b,\ c\}$ obtenu à l'aide de la formule d'Euclide est un triplet pythagoricien pour $1 \leq v < u \leq 6$.
3. Toujours à l'aide d'un tableur, compléter le fichier créé en donnant les triplets pythagoriciens pour $1 \leq v < u \leq 15$.
4. Question supplémentaire : classer par ordre croissant les trois entiers formant le triplet.

Faire vérifier le travail par le professeur.

5. Démontrer que le triplet $\{a,\ b,\ c\}$ de nombres obtenu par la formule d'Euclide est un triplet pythagoricien.
6. On suppose que le triplet $\{a\,;\,b\,;\,c\}$ est pythagoricien.
   (a) Montrer que pour tout entier n, le triplet $\{na\,;\,nb\,;\,nc\}$ est pythagoricien et que pour tout diviseur d commun à a, b, c, le triplet $\{\frac{a}{d}\,;\,\frac{b}{d}\,;\,\frac{c}{d}\}$ est lui aussi pythagoricien.
   (b) En déduire un triplet d'entiers pythagoriciens tous supérieurs à 500.

Production demandée :

– Fichier de tableur obtenu aux questions 2, 3 et éventuellement 4.
– Copie contenant les réponses aux questions 1, 5 et 6.