

Rectangle de périmètre donné et d'aire maximale.

On considère un rectangle $ABCD$ de périmètre 12 cm. On suppose que AB est la longueur, et AD la largeur. On pose $AB = x$, et l'on cherche s'il existe une valeur de x pour laquelle l'aire de ce rectangle est maximale.

Questions préliminaires :

1. Expliquer pourquoi x varie entre 0 et 6.
2. Exprimer la largeur AD en fonction de x .

Partie expérimentale :

On se place dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

On suppose que le point A est confondu avec l'origine O du repère, B est sur l'axe des abscisses et D sur l'axe des ordonnées. Ainsi B a pour coordonnées $(x, 0)$.

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

1. Placer les points A, B, C, D répondant aux contraintes posées dans le repère orthonormé et tracer le rectangle $ABCD$.
2. Faire afficher la longueur AB , la largeur AD ainsi que l'aire de ce rectangle.
3. Conjecturer pour quelle position de B l'aire du rectangle est maximale. Que peut-on alors conjecturer pour le rectangle $ABCD$?

Appeler le professeur pour vérifier la figure, ou pour demander de l'aide

Résolution mathématique :

On conserve les notations de la partie précédente, x désignant l'abscisse du point B .

4. Calculer l'aire de $ABCD$ en fonction de x .
5. Montrer que cette aire peut s'exprimer $Aire(ABCD) = 9 - (x - 3)^2$.
6. a, b, c étant trois nombres quelconques. On suppose $a \leq b$. Voici deux propriétés :
 - (P_1) : un carré est toujours positif.
 - (P_2) : on ne change pas le sens d'une inégalité en **ajoutant (ou soustrayant) un même nombre aux deux membres d'une inégalité**.
 - a. Indiquer quelle propriété est utilisée à chaque étape, en précisant dans le cas de la **propriété 2** quel nombre on soustrait ou additionne à chaque membre de l'inégalité :

Si x appartient à $[0 ; 6]$ alors : $0 \leq (x - 3)^2$
alors : $9 \leq 9 + (x - 3)^2$
alors : $9 - (x - 3)^2 \leq 9$
 - b. En déduire **que l'aire du rectangle** est inférieure ou égale à 9 et que l'égalité est réalisée pour une et une seule valeur de x que l'on précisera.

Travail demandé à l'élève

Réaliser la figure répondant au problème posé en créant un point B variant entre 0 et 6 .

Conjecturer pour quelle position de B , l'aire du rectangle est maximale.

Démontrer le résultat conjecturé.