Ensembles de Julia : Étude d'une famille de suites complexes

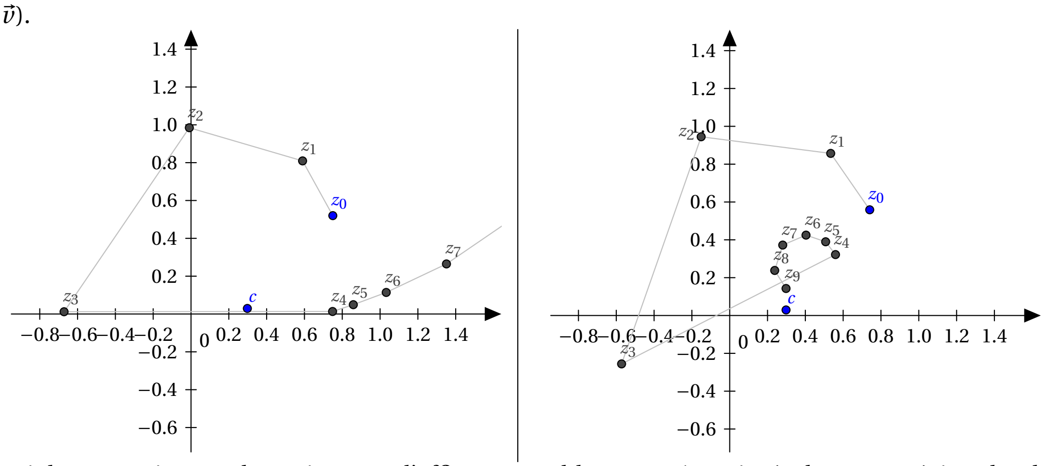
Travail suivi n°1

Présentation du problème :

Dans ce projet, on considère un nombre complexe c de module inférieure strictement à 1 et la suite complexe (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 \text{ est un nombre complexe donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

Cette suite est donc définie par la donnée de c et de z_0. Le comportement d'une telle suite ne peut être qualifié en terme de variation comme pour les suites réelles, car nous ne connaissons pas de relation d'ordre sur l'ensemble des nombres complexes. Cependant, il suivant la valeur de c ou de z_0 le comportement de la suite (z_n) peut être assez différent comme le montre les deux situations suivantes où l'on a représenté les points d'affixe c, z_0, z_1.... dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.



Ainsi dans certains cas, les points M_n d'affixe z_n semblent tous être situés dans une région du plan "limitée" (par exemple un cercle centré sur l'origine). Dans d'autres en revanche les points M_n semblent ne pas pouvoir être contenus dans une région "limitée". Dans la première situation, on dira que la suite est "bornée".

Pour une valeur de c donnée, **quel sont les valeurs complexes de z_0 conduisant à une suite "bornée" ? Est-on capable de faire une "carte" des points dont l'affixe correspondant à une valeur de z_0 conduisant à une suite "bornée" ?**

Ensembles de Julia : Nombres complexes et Informatique

Travail suivi n°1

Exercice n° 1 : Nombres complexes et programmation sous algobox.
Algobox comme la plupart des langages informatiques ne gère pas les nombres complexes, il faut donc gérer chaque nombre complexe à l'aide de deux variables l'une étant sa partie réelle et l'autre sa partie imaginaire.

Ci-dessous figure un exemple où sont fourni un algorithme portant sur des nombres complexes et son implémentation sous Algobox :

Algorithme	Programme Algobox
	VARIABLES
Déclaration des variables	a EST_DU_TYPE NOMBRE
z est un nombre complexe	b EST_DU_TYPE NOMBRE
	DEBUT_ALGORITHME
Entrée	lire a
lire z	lire b
	afficher a
Sortie	afficher "+"
Afficher z	afficher b
	AFFICHER* "i"
	FIN_ALGORITHME

Dans le tableau ci-dessous lorsque l'algorithme est fourni donner l'implémentation manquante et lorsque l'implémentation est fournie donner l'algorithme manquant :

Algorithme	Programme Algobox
	VARIABLES
Déclaration des variables	a,b,ac,bc EST_DU_TYPE NOMBRE (lignes regroupées)
z est un nombre complexe	DEBUT_ALGORITHME
c est un nombre complexe	lire a
	lire b
Entrée	
lire z	
Donner à c la valeur 1-2i	
Donner à z la valeur z+c	
	afficher a
Sortie	afficher "+"
Afficher z	afficher b
	AFFICHER* "i"
	FIN_ALGORITHME
	VARIABLES
	a,b,t EST_DU_TYPE NOMBRE (lignes regroupées)
Déclaration des variables	DEBUT_ALGORITHME
z est un nombre complexe	lire a
	lire b
Entrée	t PREND_LA_VALEUR pow(a,2)-pow(b,2)
	b PREND_LA_VALEUR 2*a*b
	a PREND_LA_VALEUR t
	afficher a
Sortie	afficher "+"
Afficher z	afficher b
	AFFICHER* "i"
	FIN_ALGORITHME

Algorithme

```
Déclaration des variables
z est un nombre complexe
z' est un nombre complexe
Entrée
Lire z
Lire z'
Donner à z la valeur z*z'

Sortie
Afficher z
```

Programme Algobox

```
VARIABLES
.......... EST_DU_TYPE NOMBRE (lignes regroupées)
DEBUT_ALGORITHME
lire a
lire b
lire ap
lire bp


afficher a
afficher "+"
afficher b
AFFICHER* "i"
FIN_ALGORITHME
```

Exercice n° 2 : Suite complexe.

On considère la suite complexe Z définie par $\begin{cases} z_0 \text{ est un nombre complexe donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 \end{cases}$

L'objectif de cet exercice est de déterminer pour quelle valeur de z_0 cette suite "reste bornée" c'est à dire que le suite (m_n) des modules associée est bornée.

Remarque : Attention, on ne peut comparer deux nombres complexes, donc les mots majorés et minorés n'ont aucun sens pour la suite Z*, le caractère "borné" de Z est donc défini par le fait que la suite des modules des termes est bornée (en fait, majorée car la suite des modules est toujours minorée par 0). Ainsi dire que* Z *reste bornée revient à dire que les images des termes de la suite dans un repère* $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ *sont toutes contenues dans un cercle centré en* O *(le rayon du cercle étant un majorant de la suite des modules.*

(m_n) est la suite réelle définie pour tout entier naturel n par $m_n = |z_n|$.

1. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les 15 premiers termes de la suite Z et leur module lorsque l'on saisit z_0 en entrée :

```
Déclaration des variables
z est un nombre complexe
i est un entier naturel
Entrée
Lire z
Donner à i la valeur 0
Tant que i<100 faire
        | Donner à z la valeur z^2
        | Donner à i la valeur i+1
Sortie
Afficher z
```

2. Ouvrir le fichier **S1exercice2.alg** avec algobox et modifier le programme chargé pour programmer l'algorithme modifié précédemment.
3. Ouvrir avec geogebra le fichier **avjul1.ggb**. Dans la figure le point A a pour affixe z_0, et il est possible de déplacer le point A pour modifier z_0.
   - **a.** Saisir dans zone de saisie : z_0 ^ 2 . Vous constaterez que geogebra contrairement à algobox gère les nombres complexes et qu'il représente un nombre complexe dans le plan par son image.
   - **b.** Construire ainsi les 10 premiers termes de la suite Z et leurs images.
   - **c.** En déplaçant le point A conjecturer l'ensemble des points A pour lesquels la suite des modules converge vers 0 et l'ensemble des points A pour lesquels la suite des modules reste bornée. *Pour vous aider, il pourra être utile d'afficher le cercle de centre* O *et de rayon* $|z_0|$ *en cochant la case "Cercle".*

Ensembles de Julia : diversité des comportements

Travail suivi n°1

A rendre pour le 7 novembre 2013

Dans la suite de ce travail, on considère un nombre complexe c de module inférieure strictement à 1 et la suite complexe (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 \text{ est un nombre complexe donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$

On note (m_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel n par $m_n = |z_n|$ (suite des modules associée à (Z_n)).

1. Dans cette question, **la constante** c **est fixée à** 0. On retrouve ainsi la suite Z dont on a représenté les premiers termes et calculé les premiers termes à l'aide de Geogebra et d'Algobox. Nous allons, pour ce cas particulier, déterminer le caractère "borné" ou non de la suite (z_n) suivant les valeurs de z_0.

- **a.** Justifier que lorsque $|z_0| = 1$ ou lorsque $|z_0| = 0$ la suite (m_n) est constante.
- **b.** Démontrer par récurrence que lorsque $0 < |z_0| < 1$, la suite (m_n) est strictement décroissante. Étant donné que la suite (m_n) est minorée par 0, on pourra démontrer plus tard dans l'année que la suite (m_n) converge.
- **c.** Démontrer par récurrence que lorsque $|z_0| > 1$, la suite (m_n) est strictement croissante. on pourra démontrer plus tard dans l'année que la suite (m_n) diverge vers $+\infty$.
- **d.** Conclure concernant le caractère "borné" ou non de la suite (z_n) en fonction de z_0.

2. Constitution d'outil de visualisation de la suite (z_n) **pour** c **quelconque**.

- **a.** En réutilisant le fichier **avjul1.ggb**, construire une figure dynamique comportant un nombre complexe c et la visualisation des 10 premiers termes de la suite (z_n). Vous constaterez que la valeur de c, influence fortement le comportement de la suite. Imprimer et rendre avec votre copie la figure obtenue lorsque $c = 0,29 + 0,01\mathrm{i}$ et $z_0 = 0,75 + 0,52\mathrm{i}$, puis la figure obtenue lorsque $c = 0,16 + 0,12\mathrm{i}$ et $z_0 = 0,75 + 0,52\mathrm{i}$.
- **b.** Transformer l'algorithme programmé en classe concernant le cas où $c = 0$, pour afficher les quinze premier terme de la suite (z_n). Dans l'algorithme produit la valeur de c sera initialisée (et non saisie en entrée) alors que la valeur de z_0 sera saisie en début d'algorithme.
- **c.** Programmer l'algorithme sous Algobox (vous imprimerez votre programme et le joindrez à la copie).

3. Production d'un **algorithmique de décision** :

- **a.** En utilisant les outils construits à la question précédente, peut-on conjecturer à quelle région du plan correspond l'ensemble des points A tels que la suite (z_n) est "bornée" lorsque z_0 est l'affixe de A ?
- **b.** On peut démontrer que s'il existe un rang N tel que $|u_\mathrm{N}| \geqslant 2$ alors la suite (m_n) diverge vers l'infini. Cela permet de construire un algorithme qui, pour un z_0 donné, calcule successivement les termes de la suite (z_n) et affiche *suite non "bornée"* dès que $|z_n| \geqslant 2$.
  Écrire un tel algorithme en modifiant l'algorithme programmé précédemment (Vous pouvez rendre cet algorithme écrit en langue naturelle ou sous algobox).
- **c.** Y-a-t-il des conditions où votre algorithme ne se termine pas ? Justifier votre réponse. *(la réponse à cette question ne doit pas se baser sur l'exécution du programme correspondant sous algobox qui ne fait apparaître souvent que les limitations du logiciel algobox)*
- **d.** Pour garantir que l'algorithme se termine systématiquement, modifier votre algorithme de manière qu'il calcule au plus 100 termes de la suite (z_n) et affiche *suite "non bornée"* dès que $|z_n| \geqslant 2$ et affiche *la suite semble "bornée"* si les 100 premiers termes ont un module inférieur à 2. Vous programmerez cet algorithme sous algobox avec $c = 0,16 + 0,12\mathrm{i}$ et joindrez les impression des résultats obtenus avec $z_0 = 0,75 + 0,52\mathrm{i}$ et avec $z_0 = 0,04 + 1,024\mathrm{i}$.

Nous avons ainsi construit un algorithme de décision concernant le caractère "bornée" ou non de la suite (z_n).

Ensemble de Julia : Démonstration

Travail suivi n°1
A rendre pour le

Dans la suite de ce travail, on considère un nombre complexe c de module inférieure strictement à 1 et la suite complexe (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 \text{ est un nombre complexe donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$

On note (m_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel n par $m_n = |z_n|$ (suite des modules associée à (Z_n)).

1. Démonstration d'une propriété du module :

a. Une conjecture :
On considère deux nombres complexes z_A et z_B tels que $|z_B| > |z_A|$ et on note $z_C = z_A + z_B$.
Ouvrir à l'aide de Geogebra la figure **triangul.ggb**. Dans cette figure sont représentés le plan complexe muni du repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes z_A, z_B et z_C, ainsi que les images vectorielles de ces trois nombres complexes. De plus, trois cercles de centre O ont été tracés : en noir les cercles de rayon $|z_A|$ et $|z_B|$ et en rouge le cercle que nous nommerons Γ de rayon $|z_B| - |z_A|$.
En déplaçant les points A et B, que peut-on conjecturer de la position relative de C et de Γ ?

b. Traduire la conjecture précédente sous forme d'une inégalité entre les modules de z_A, z_B et z_C.

c. Démonstration de la conjecture : Soit e et f deux nombres complexes. On note E et F leur image respective dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère D l'image du nombre complexe $e + f$.

i. Faire une figure en prenant soin d'éviter le cas particulier où O, E et F sont alignés.

ii. Quel est la nature du quadrilatère OEDF ? Justifier votre réponse.

iii. Comparer OD et OE + ED.

iv. En déduire que pour tout nombre complexe e et f, $|e + f| \leqslant |e| + |f|$.

v. En posant $e = z_A + z_B$ et $f = -z_A$, justifier la conjecture énoncée précédemment.

2. Justifier que pour tout n tel que $|z_n| \geqslant 2$ alors $|z_n|^2 > |z_n| + 1$.

3. On note N un entier naturel tel que $|z_N| \geqslant 2$. On pose $r = 1 - |c|$, et on note (u_n) la suite arithmétique définie à partir du rang N, de premier terme $u_N = |z_N|$ et de raison r.

a. Justifier que pour tout $n > N$, $u_n > 2$.

b. En utilisant le résultat démontré à la question précédente, démontrer alors par récurrence que pour tout $n > N$, $|z_n| > u_n$

4. Ainsi, s'il existe un rang N tel que $u_N \geqslant 2$, alors pour tout $n > N$, la suite $m_n > u_n$. Déterminer, dans ce cas, la limite de (m_n).

Lignes de niveau

Travail suivi n°1

1. On considère l'algorithme suivant :

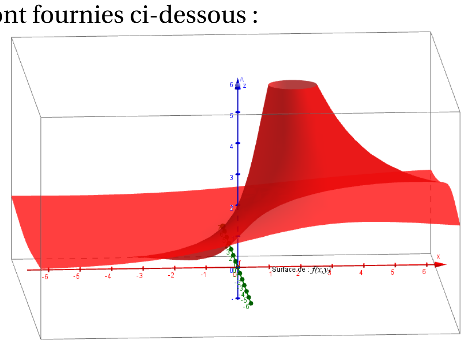
```
VARIABLES
  xi EST_DU_TYPE NOMBRE
  yi EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR xi ALLANT_DE -20 A 20
    DEBUT_POUR
    POUR yi ALLANT_DE -20 A 20
      DEBUT_POUR
      x PREND_LA_VALEUR xi/10
      y PREND_LA_VALEUR yi/10
      SI (x+y<1) ALORS
        DEBUT_SI
        TRACER_POINT_Rouge (x,y)
        FIN_SI
        SINON
                DEBUT_SINON
                TRACER_POINT_Bleu (x,y)
                FIN_SINON
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

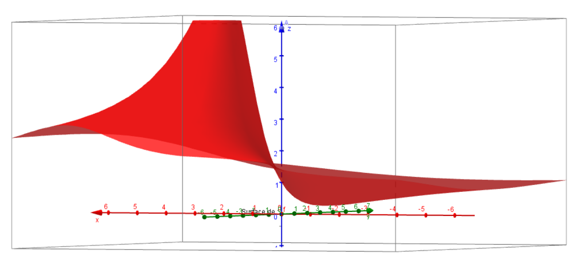
a. Ouvrir le fichier **niveau_ enon.alg** avec algobox, et exécuter ce programme.

b. Décrire ce que trace ce programme.

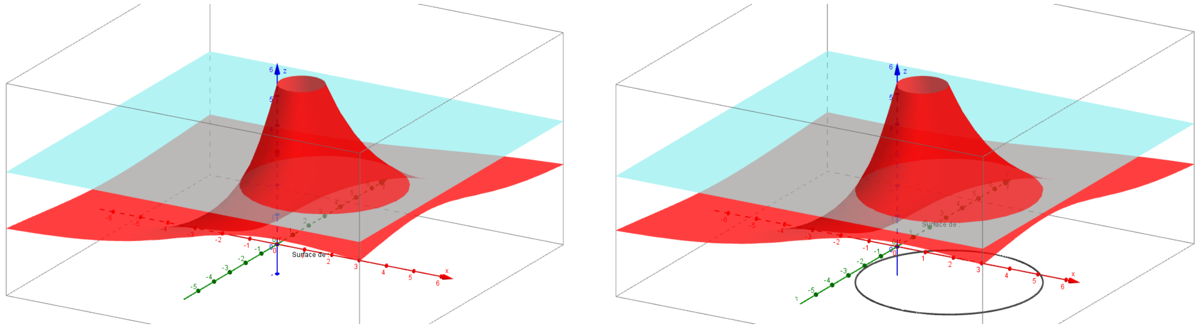
c. Modifier ce programme pour qu'il trace un réseau de 401 points par 401 points dans la même fenêtre graphique.

2. On considère la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{3((x+1)^2+y^2)+4}{2((x-1)^2+(y+1)^2)+3}$. Dans un repère orthonormé de l'espace, à chaque point M du plan $(\mathrm{O}xy)$ de coordonnées $(x,y,0)$, on associe le point M' de coordonnées $(x,y,f(x,y))$. L'ensemble des points M' forme une surface S dont plusieurs vues sont fournies ci-dessous :





Pour représenter dans le plan cette surface, on peut choisir de dessiner une perspective de celle-ci comme ci-dessus ou de dessiner des courbes ou lignes de niveau. Chaque représentation à un intérêt différent. La courbe de niveau k est la projection orthogonale de la section de la surface S par le plan d'équation $z=k$.



a. Modifier le programme obtenu à la question, pour qu'il trace en rouge les points du réseau dont les coordonnées (x, y) vérifient $f(x, y) = 3$. Que constatez-vous ?

b. Pour palier le problème de la question précédente, il convient d'introduire une "tolérance" et de tracer les points du réseau dont les coordonnées (x, y) vérifient $|f(x, y) - 3| < 0,01$. Modifier votre programme et visualisez le résultat.

c. Compléter votre programme qu'il trace simultanément les lignes de niveau :

$$0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7.$$

Ensemble de Julia : représentation d'un ensemble de Julia

Travail suivi n°1

A rendre pour le

Dans la suite de ce travail, on considère un nombre complexe c de module inférieure strictement à 1 et la suite complexe (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 \text{ est un nombre complexe donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$

On note (m_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel n par $m_n = |z_n|$ (suite des modules associée à (Z_n)).

Ce travail fait suite aux différents devoirs à la maison et séances en classe consacrés à cette suite (z_n), mais aussi au travail sur les lignes de niveau.

1. Modifier le programme **niveau_ enon.alg** sous algobox fourni pour l'activité "Lignes de niveau", pour qu'il trace un réseau de 201 points par 241 points dans la fenêtre graphique Xmin=-1, X=max=1, Ymin=-1,2 et Ymax=1,2 *(il s'agit de modifier le programme pour qu'il trace sur 241 lignes parallèles à l'axe des abscisses de 201 points, mais aussi de modifier dans "Dessiner dans un repère" les paramètres de la fenêtre graphique).*
2. **a.** En utilisant l'algorithme de décision concernant le caractère "bornée" ou non de la suite (z_n), modifier le programme de la question précédente pour tracer en bleu les points d'affixe z tels que si $z_0 = z$ et $c = 0,285 + 0,013\text{i}$ alors la suite (z_n) est "bornée" (les autres points seront tracés en blanc).

   b. Exécuter votre programme et imprimer le programme et la figure obtenue.
   L'ensemble ainsi tracé est appelé ensemble de Julia rempli pour la constante $c = 0,285 + 0,013\text{i}$.
3. Reprendre la question précédente pour tracer les ensembles de Julia remplis pour la constante $c = -0,8 + 0,156\text{i}$, puis pour la constante $c = 0,3 + 0,5\text{i}$ *(Vous adapterez la fenêtre graphique lorsque c'est nécessaire pour tracer une figure complète).*
4. **Exploration :**
   Utiliser votre programme pour d'autres valeurs de c. Vous constaterez que les résultats sont très variables suivant les valeurs choisies. Joindre à votre copie l'ensemble de Julia qui vous paraîtra le plus original en fournissant la valeur de c correspondante.

Ensemble de Julia rempli :

Notion étudiée par Gaston Julia, mathématicien français (1893 - 1979) en 1918.

Les mathématiciens ont démontré que pour certaines valeurs de c l'ensemble de Julia rempli est d'un seul tenant, alors que pour d'autres, il est réduit à un nuage de points. Ces valeurs sont liées à un ensemble célèbre lui aussi défini à l'aide des suites complexes que l'on appelle ensemble de Mandelbrot qui est représenté ci-dessous :